
마지막 변경일 2018년 5월 7일

** 도형의 자취 문제 **

Geogebra와 수학의 시각화 책의 4.1소절 내용임.

<http://min7014.iptime.org/math/2017063002.htm>

가장 최근 파일은 링크를 누르면 받아 보실 수 있습니다.

<https://goo.gl/TyWCbZ>

<http://min7014.iptime.org/math/2018010402.pdf>

자료의 수정이 필요한 부분이 있으면 언제든지

민은기 E-mail : min7014@nate.com

이경수 E-mail : ksteach81@gmail.com

으로 연락주시면 감사하겠습니다.

강의록을 보기전에 프로그램 설치를 반드시 읽어보시고 꼭 지오지브라 클래식 5를 설치하시기 바랍니다.

<https://goo.gl/wqWJ6v>

<http://min7014.iptime.org/math/2018011001.pdf>

* 주요변경내역 *

2017.06.24 Geogebra와 수학의 시각화 책에 엮어 출간.

차 례

차 례	i
제 1 장 Geogebra를 활용한 문제탐구	1
1.1 도형의 자취 문제	3

제 1 장

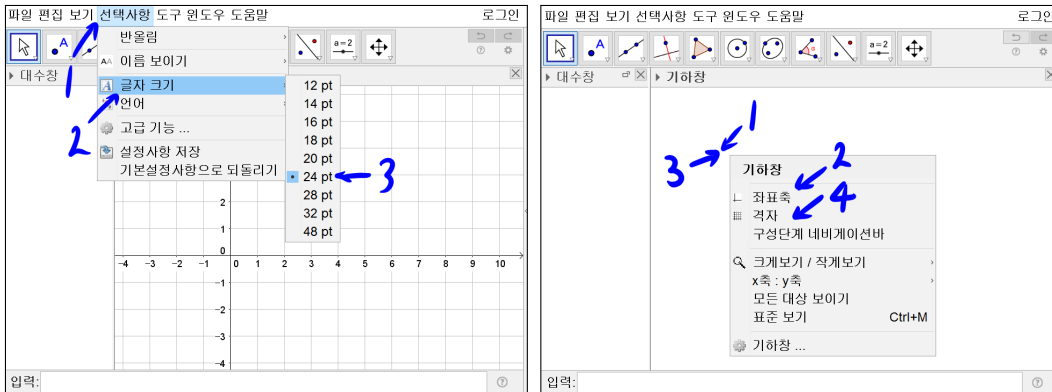
Geogebra를 활용한 문제탐구

1.1 도형의 자취 문제

도형의 자취문제를 풀다보면 실제로 그려지는 자취를 확인해 보고 싶은 경우가 있습니다. 간단한 문제의 경우 직접 그려볼 수 있겠지만 복잡한 문제의 경우에는 직접 그려보는 것이 쉽지 않습니다. 이러한 경우에 Geogebra를 활용해보는 것이 어떨까 싶습니다. 그러면 아래에 주어진 자취문제로 함께 실습해 보도록 하겠습니다.

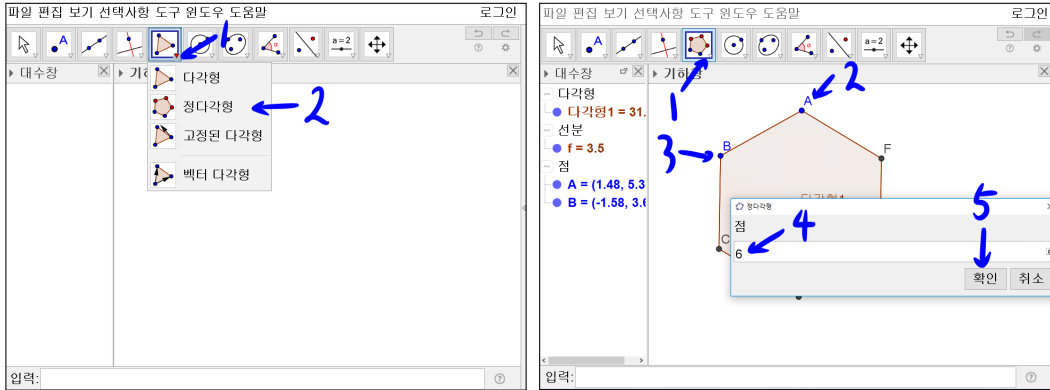
문제 : 한 변의 길이가 1인 정육각형의 내부에 한 변의 길이가 1인 정삼각형이 있고 그 정삼각형의 두 꼭짓점이 정육각형의 변을 따라 움직일 때, 남은 한 꼭짓점이 그리는 자취의 길이를 구하시오.

참고로 문제해결 과정이 Geogebra로 자료를 만들어가는 과정과 닮았기 때문에 실습에 들어가기 전에 해결방법에 대해 먼저 고민해 보는 것이 본 장의 내용을 이해하는데 많은 도움이 될 것이라 생각합니다. 해결방법에 대해 고민을 해 보셨다면 지금부터 위의 문제를 Geogebra로 구현해 보도록 하겠습니다.

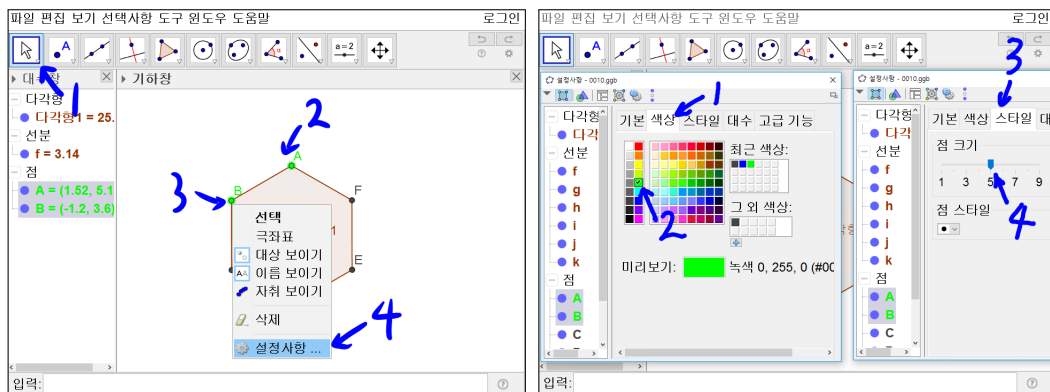


기본 세팅을 하겠습니다. 선택사항을 선택하시고 글자의 크기를 24pt로 설정합니다. 기하창에서 마우스 오른쪽 버튼을 클릭하고 좌표축을 선택하여 기하창에 좌표축이 나타나지 않게 합니다.

제 1 장 GEOGEBRA를 활용한 문제탐구

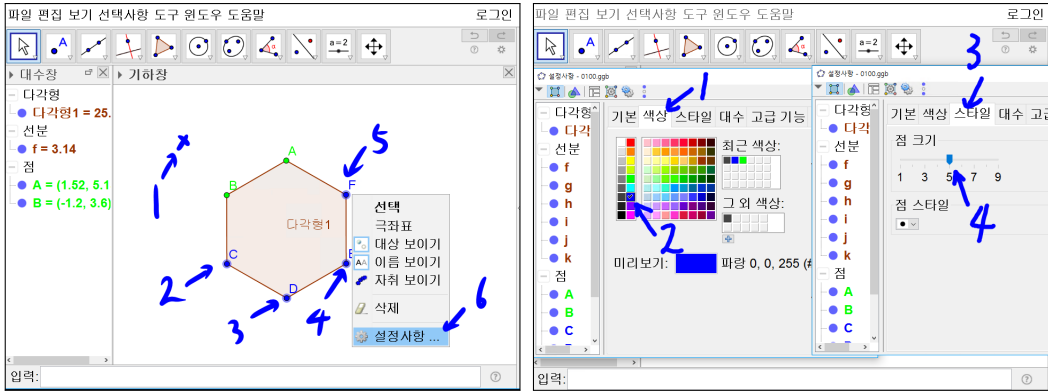


‘다각형’ 도구의 작은 역삼각형을 선택합니다. 그리고 ‘정다각형’ 도구를 선택합니다. 점 A와 점 B를 차례로 찍고 새로 생기는 정다각형 창의 빈칸에 6을 입력하고 확인을 선택합니다. 정육각형이 만들어졌습니다. 여기서 잠시 만든 과정의 의미를 살펴보겠습니다. 점 A와 점 B는 정육각형을 만드는 기본정보입니다. 즉, 점 A와 점 B를 제외한 정육각형을 구성하는 모든 것은 점 A와 점 B의 정보에 의해서 의존하는 대상인 것입니다. 따라서 점 A와 점 B를 움직이면 정육각형의 크기와 위치를 결정할 수 있게 되는 것입니다. 그럼 점 A와 점 B를 움직여서 그림처럼 기하창 가운데에 정육각형을 위치시켜주길 바랍니다.

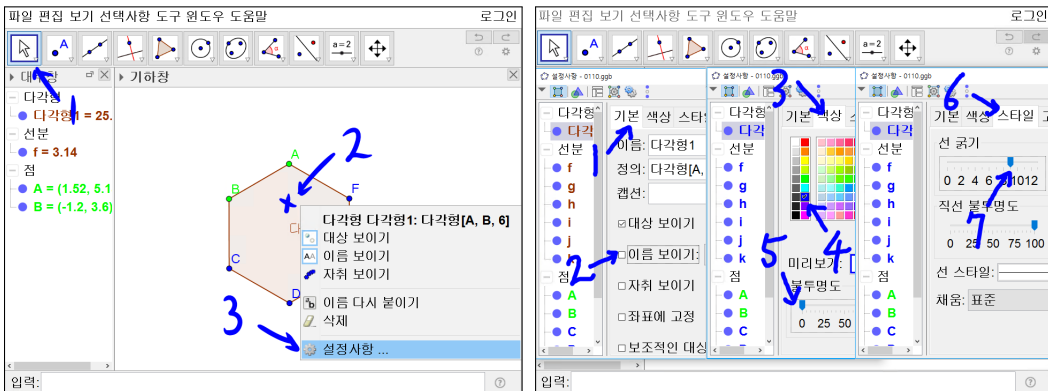


이 특별한 점 A와 점 B를 녹색으로 하겠습니다. 그리고 크기는 5로 하겠습니다. [Ctrl]를 누른 상태에서 점 A와 점 B를 차례로 선택한 후 마우스의 오른쪽

버튼을 클릭합니다. 나타난 메뉴에서 설정사항을 선택합니다. 색상 탭에서 녹색을 선택합니다. 스타일 탭에서 점 크기를 5로 합니다.



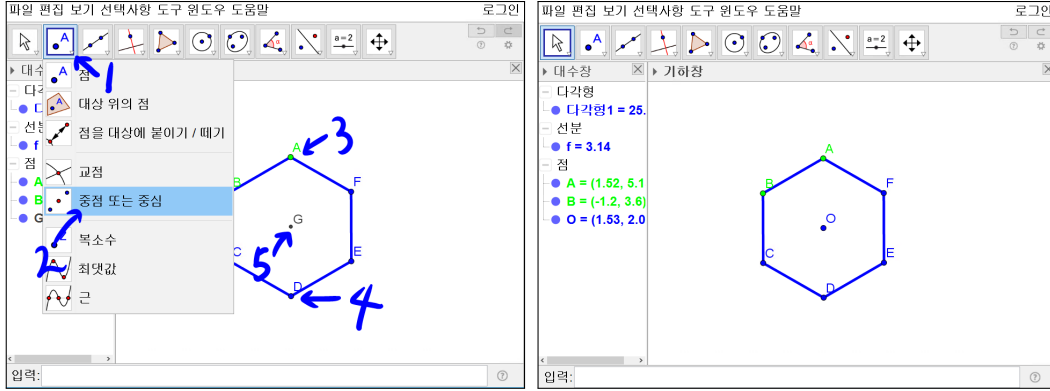
점 C, 점 D, 점 E, 점 F를 모두 파란색으로 하고 점의 크기를 5로 하겠습니다. 기하창 빈 공간을 마우스의 왼쪽 버튼을 클릭하여 점 A와 점 B를 선택해제 합니다. [Ctrl]를 누른 상태에서 점 C, 점 D, 점 E, 점 F를 차례로 선택하고 마우스의 오른쪽 버튼을 클릭합니다. 나타난 메뉴에서 설정사항을 선택합니다. 색상 탭에서 파란색을 선택합니다. 스타일 탭에서 점 크기를 5로 합니다.



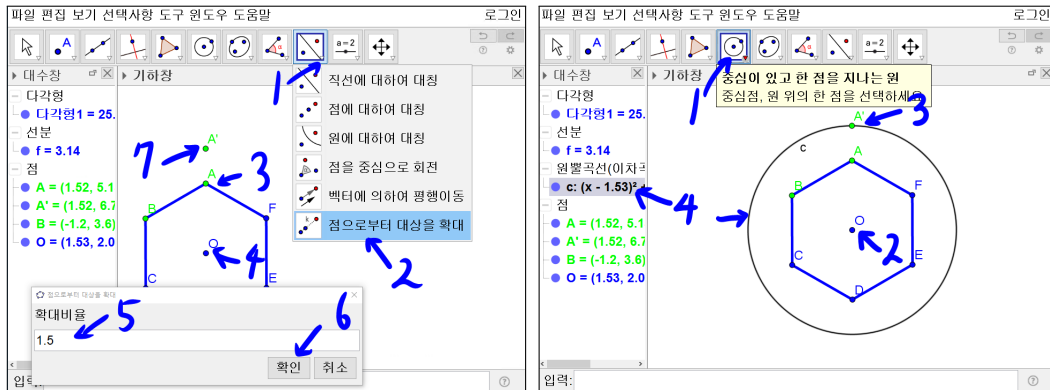
다각형1의 이름을 안 보이게 하고 다각형의 색은 파란색, 내부의 색은 투명하게 설정하겠습니다. 다각형1의 중앙에 마우스 오른쪽 버튼을 클릭합니다. 설정사항으로 들어갑니다. 기본 탭에서 이름 보이기를 선택 해제합니다. 색상 탭에

제 1 장 GEOGEBRA를 활용한 문제탐구

서 파란색으로 선택한 후 불투명도는 0으로 합니다. 스타일 탭에서 선 굵기를 9로 합니다.

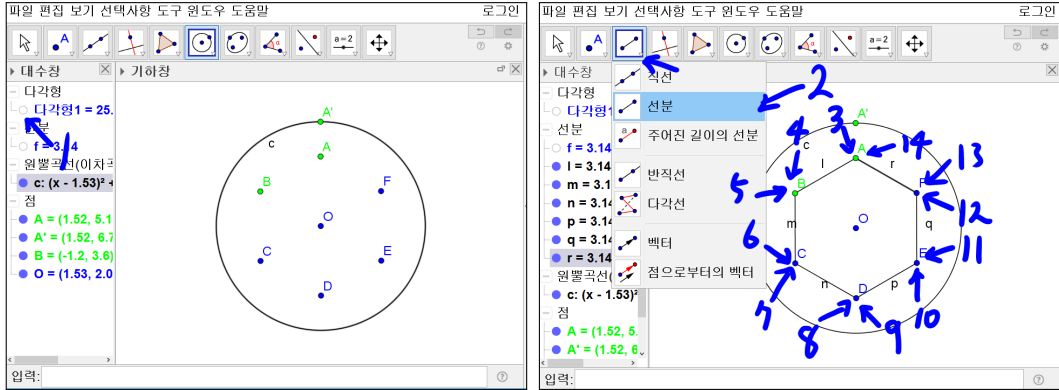


정육각형의 외접원의 중심을 작도하겠습니다. 선분 BE와 선분 CF의 교점을 점 A와 점 D의 중점으로 찾아 주겠습니다. ‘점’ 도구 역삼각형을 선택하여 ‘중점 또는 중심’ 도구를 선택합니다. 점 A와 점 D를 선택합니다. ‘중점 또는 중심’ 도구를 선택하였으므로 자동으로 점 G가 생성됩니다. 보통 원의 중심을 점 O로 하므로 점 G를 점 O로 이름을 변경하고 파란색에 크기가 5인 점으로 하겠습니다.

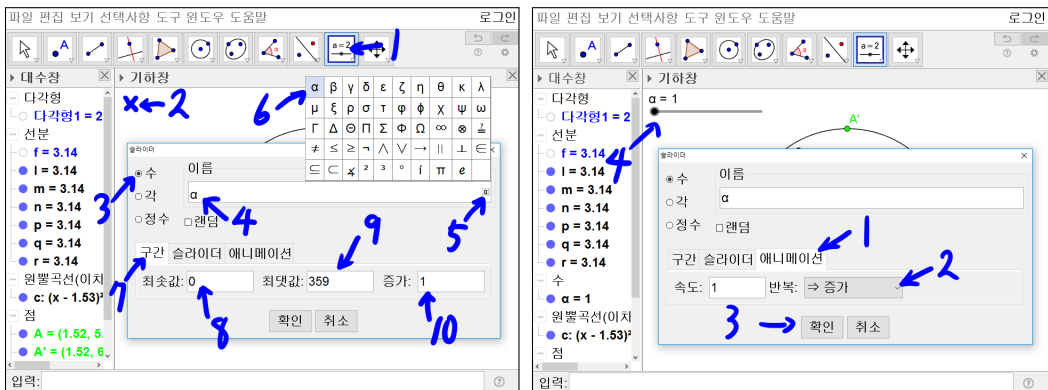


점 O를 중심으로 정육각형을 감싸는 원을 그려 보겠습니다. ‘직선에 대하여 대칭’ 도구에 역삼각형을 선택하고 ‘점으로부터 대상을 확대’ 도구를 선택합니다.

점 A를 선택하고 점 O를 선택하고 확대비율 입력창에 1.5를 입력합니다. 점 A'이 나타납니다. '중심이 있고 한 점을 지나는 원' 도구를 선택합니다. 점 O를 선택하고 점 A'를 선택하면 원 c가 만들어 집니다.

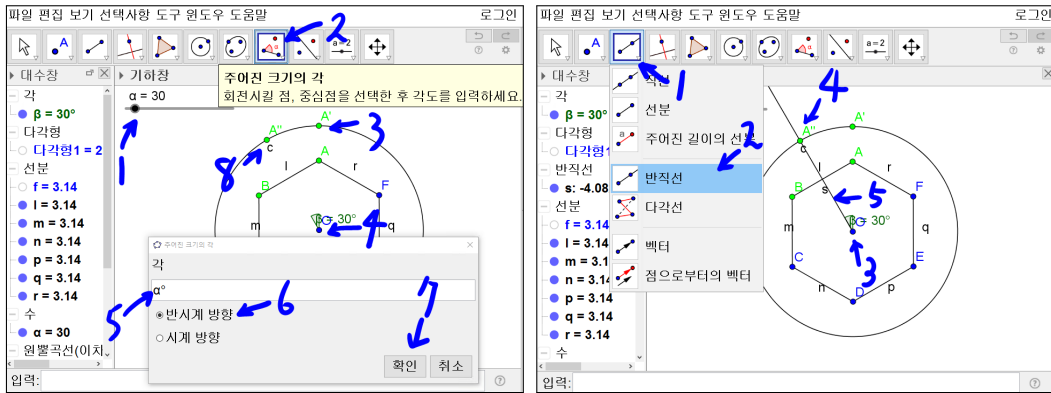


간혹 교점을 찍는 것에 문제가 있을 수 있어, 정육각형이 있지만 각 점을 다시 선분으로 연결하겠습니다. 이를 위하여 잠시 정육각형을 보이지 않게 하겠습니다. 대수창에 다각형1의 앞에 있는 조그만 원을 선택하여 채워지지 않게 합니다. 기본에서 대상 보이기를 체크해제 합니다. '선분' 도구를 선택한 후 점 A와 점 B를 선택합니다. 선분 l이 생성됩니다. 같은 방식으로 차례대로 점 B와 점 C를 선택, 점 C와 점 D를 선택, 점 D와 점 E를 선택, 점 E와 점 F를 선택, 점 F와 점 A를 선택하여 선분 m, 선분 n, 선분 p, 선분 q, 선분 r을 만듭니다.

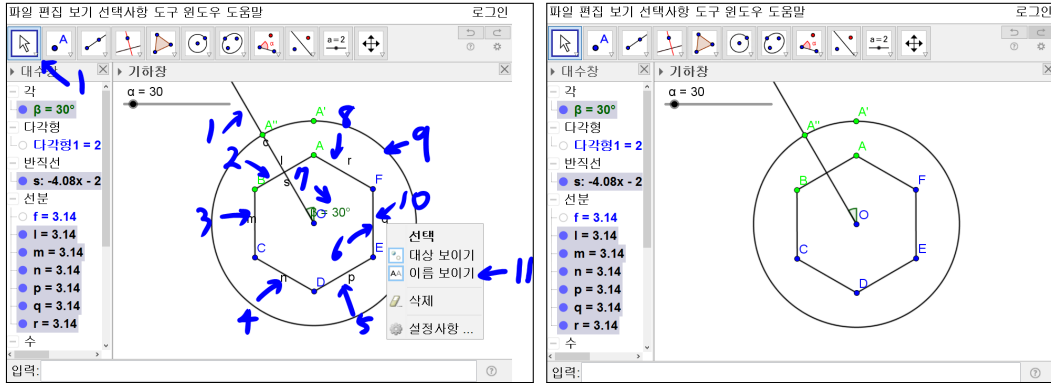


제 1 장 GEOGEBRA를 활용한 문제탐구

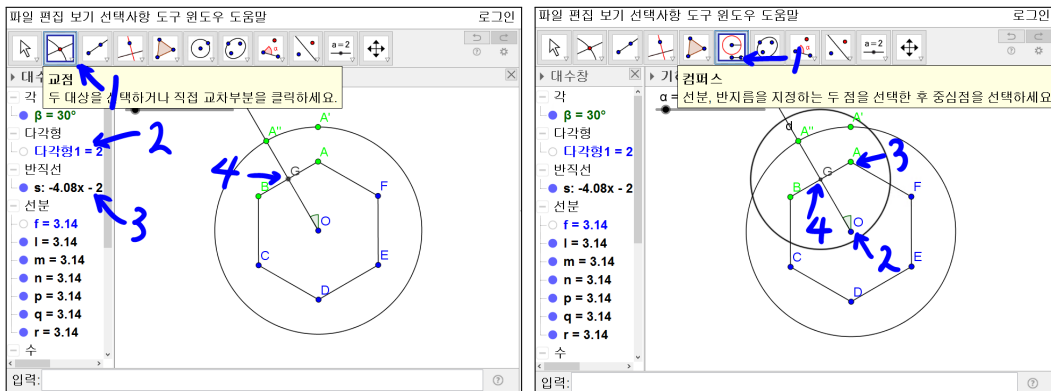
‘슬라이더’ 도구를 선택하고 기하창 왼쪽 상단 ‘x’ 표시한 부분을 선택합니다. 슬라이더 창에서 수를 선택하고 이름 칸을 선택하면 α 모양이 오른쪽 끝에 생깁니다. 이 α 를 선택하고 기호들 중 α 를 선택하면 이름 칸에 α 가 넣어 집니다. 구간에서 최솟값을 0, 최댓값을 359, 증가를 1로 하겠습니다. 애니메이션 탭을 선택하고 반복 리스트 박스에서 증가를 선택하고 확인을 선택합니다. 슬라이더 α 가 생겼습니다.



슬라이더 α 를 선택하고 방향키 오른쪽과 왼쪽 버튼을 사용하거나 점을 선택하여 마우스로 옮겨서 수 α 를 30으로 만듭니다. ‘주어진 크기의 각’ 도구를 선택하고 점 A' 를 선택하고 점 O 를 선택하고 주어진 크기의 각 창에 빈칸에 α° 를 입력합니다. 방법은 앞에 설명한 기호 입력방법 대로 하시면 됩니다. 여기서 주의할 것은 반드시 $^\circ$ 가 있어야 합니다. 그렇지 않으면 이 수를 라디안 단위로 인식하게 됩니다. 그리고 확인을 누르면 점 A'' 이 생성됩니다. 즉 각 $A'OA''$ 가 30° 가 되도록 점 A'' 이 생성된 것입니다. ‘반직선’ 도구를 선택하고 점 O 과 점 A'' 를 선택하여 반직선 s 를 만듭니다.



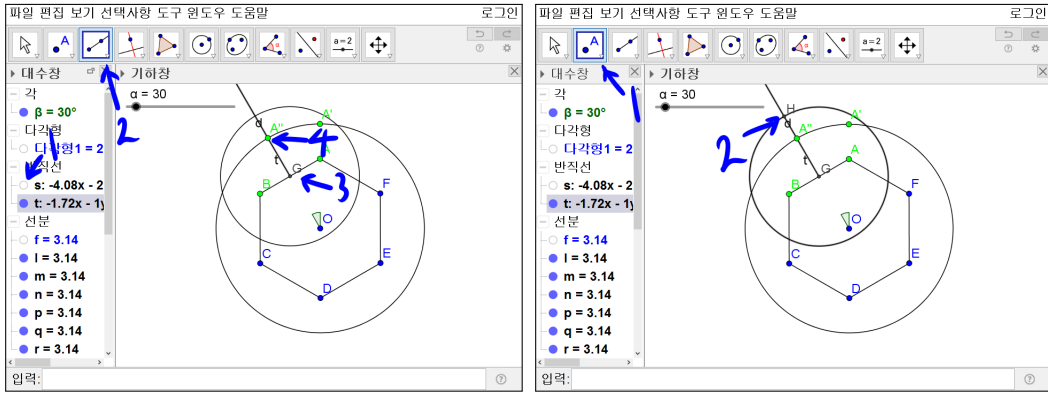
반직선, 선분, 원, 각의 이름이 너무 많아 이제 지저분하게 보여 집니다. 이 이름들을 보이지 않게 하겠습니다. [Ctrl]를 누른 상태에서 직선, 선분, 원을 모두 선택하고 각의 이름 30°를 선택하고 마우스 오른쪽 버튼을 클릭하여 메뉴창이 나오면 이름 보이기를 선택합니다. 반드시 ‘이름 보이기’를 선택하셔야 합니다. 지저분했던 반직선, 직선, 각의 이름이 보이지 않게 된 것을 확인 할 수 있습니다. 혹시나 대상을 보이기를 선택하면 기하적 대상들이 보이지 않게 됩니다. 이런 실수를 했다면, [Ctrl] + [Z]를 눌러 바로 전 단계 작업으로 갈 수 있습니다.



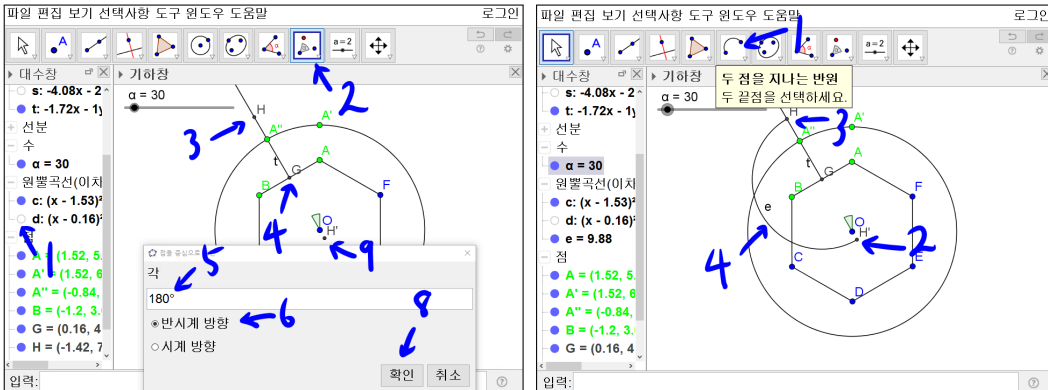
‘교점’ 도구를 선택하고 [Ctrl]를 누른 상태에서 다각형1과 반직선 s를 선택합니다. 다각형1과 반직선 s의 교점 G가 생성됩니다. 수 a를 선택하고 오른쪽과 왼쪽 방향키를 움직여서 수 a가 90이 되게 합니다. 이 때 만약 점 G가 사라진다면 아마도 선분 AB와 반직선 s의 교점을 찍은 것일 수 있습니다. 반드시

제 1 장 GEOGEBRA를 활용한 문제탐구

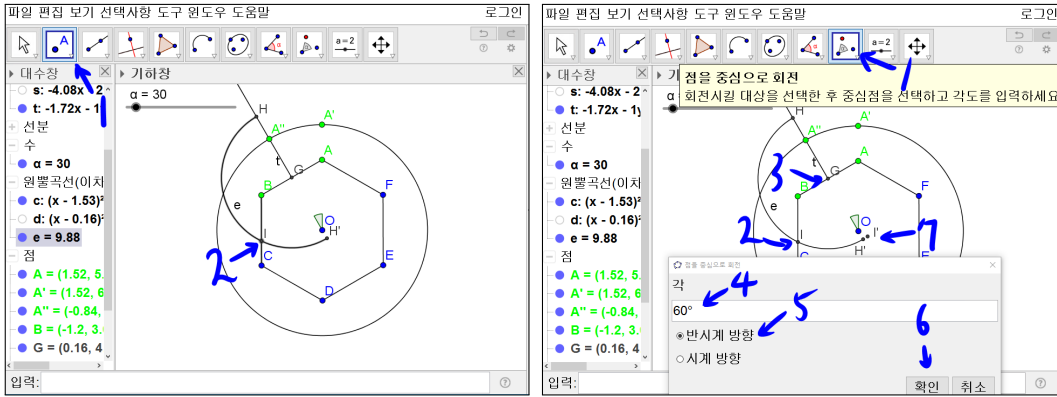
다각형1과 반직선 s의 교점으로 해야 합니다. 확인이 됐다면 다시 수 α 를 30으로 만듭니다. 반지름이 선분 OA의 길이가 되고 중심을 점 G로 하는 원을 그리겠습니다. ‘컴퍼스’ 도구를 선택합니다. 점 O와 점 A를 선택하고 마우스를 움직이면 마우스를 중심으로 반지름이 선분 OA의 길이인 원이 그려진 것이 보여 집니다. 이 상태에서 점 G를 선택하면 원 d가 생성됩니다.



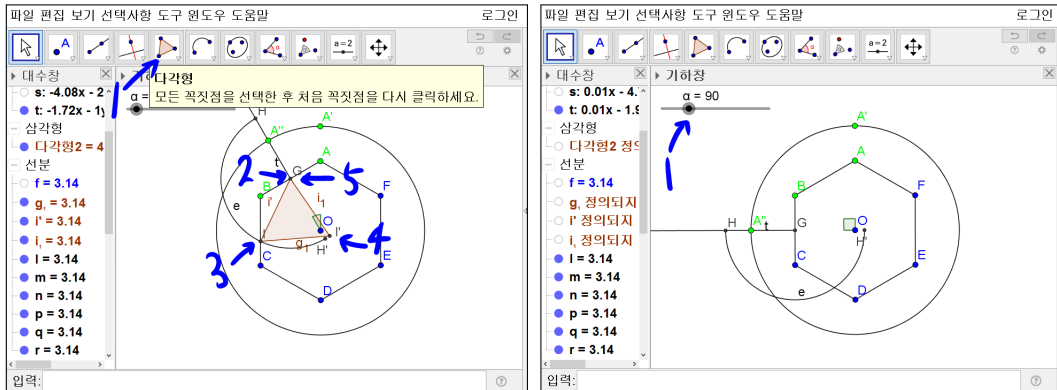
대수창에 반직선 s의 앞에 있는 작은 원을 선택하여 반직선 s가 사라지게 합니다. ‘반직선’ 도구를 선택하고 점 G와 점 A''를 선택하여 반직선 t를 만듭니다. ‘점’ 도구를 선택하고 마우스를 원 d와 반직선 t의 교점에 가져갑니다. 원 d와 반직선 t가 굵어집니다. 이때 마우스를 클릭하면 원 d와 반직선 t의 교점 H가 작도됩니다.



대수창의 원 d의 앞에 있는 작은 원을 선택하여 사라지게 합니다. ‘점을 중심으로 회전’ 도구를 선택합니다. 차례로 점 H를 선택하고 점 G를 선택합니다. 점을 중심으로 회전 창의 각에 180°를 입력하고 반시계 방향을 선택하고 확인을 선택합니다. 점 H'이 작도됩니다. ‘두 점을 지나는 반원’ 도구를 선택하고 차례로 점 H'과 점 H를 선택하여 반원 e를 만듭니다.

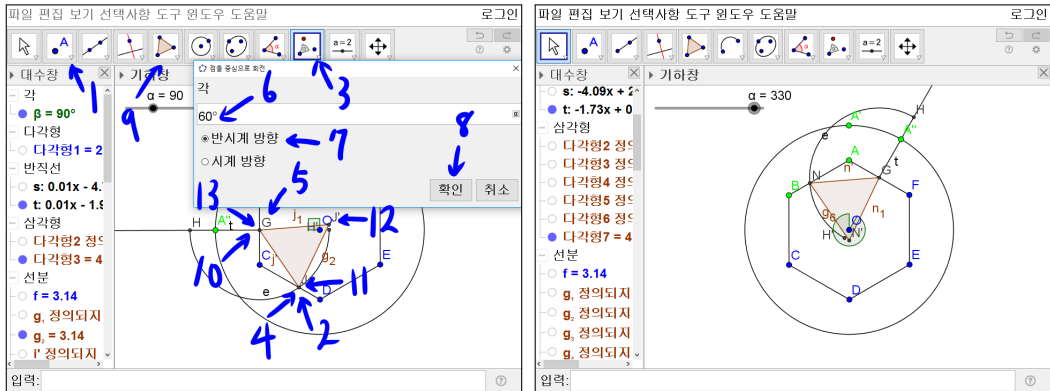


‘점’ 도구를 선택하고 마우스를 반원 e와 선분 BC의 교점에 가져갑니다. 반원 e와 선분 BC가 겹어집니다. 이때 마우스 왼쪽 버튼을 클릭하면 반원 e와 선분 BC의 교점 I가 작도됩니다. ‘점을 중심으로 회전’ 도구를 선택합니다. 차례로 점 I를 선택하고 점 G를 선택합니다. ‘점을 중심으로 회전’ 창에서 빈칸에 60°를 입력하고 반시계 방향을 선택하고 확인을 선택합니다. 점 I'이 작도됩니다.

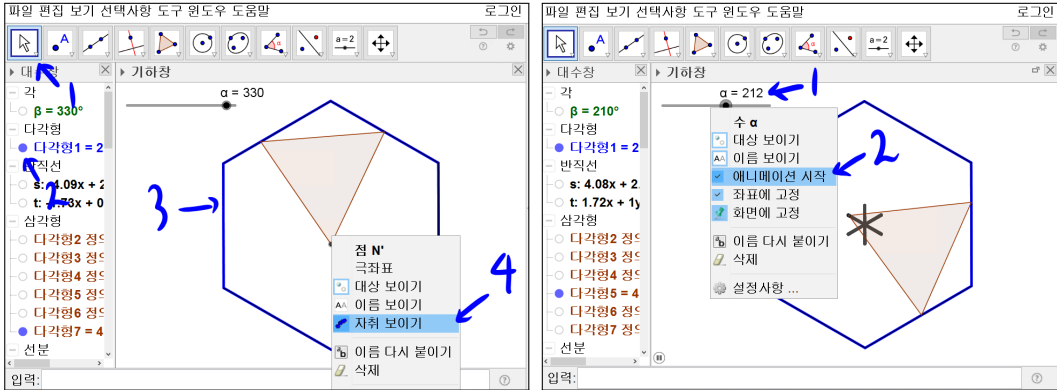


제 1 장 GEOGEBRA를 활용한 문제탐구

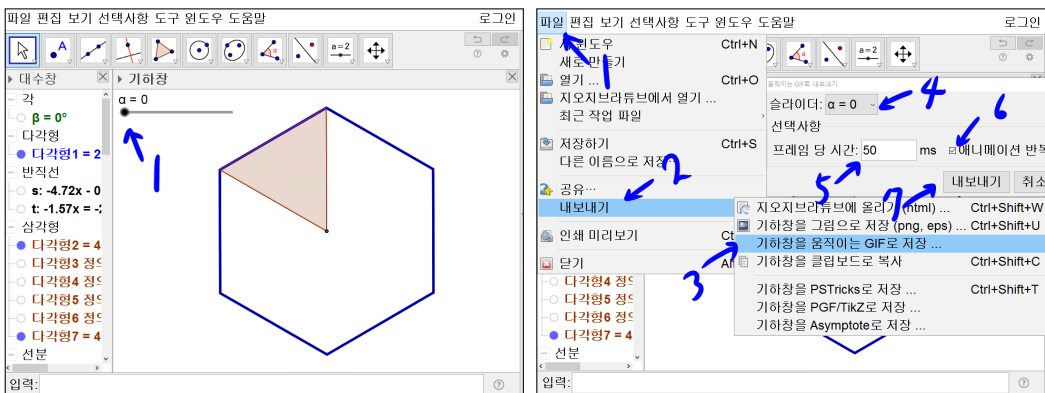
‘다각형’ 도구를 선택하고 차례로 점 G를 선택하고 점 I를 선택하고 점 I'를 선택하고 다시 점 G를 선택하면 정삼각형이 만들어 집니다. 기하창에서 슬라이더 α 를 선택하고 오른쪽 방향키를 사용하여 30에서 60이 되도록 수의 α 값을 증가시키면 60까지는 삼각형이 정육각형 내부에서 미끄러지면서 움직이다가 수 α 의 값이 60보다 커지면 갑자기 삼각형이 사라집니다. 그 이유는 점 I가 반원 e와 선분 BC의 교점이기 때문입니다. 수 α 의 값이 60보다 커지는 순간 반원 e와 선분 BC가 교점을 가지지 않기에 점 I가 사라지고 동시에 점 I에 종속되어 있던 기하적 대상인 점 I'와 삼각형 GII'이 사라지는 것입니다. 이런 상황이 삼각형이 사라지는 이유가 될 것입니다.



다시 ‘점’ 도구를 선택하고 마우스를 반원 e와 선분 CD의 교점에 가져갑니다. 반원 e와 선분 CD가 굽어집니다. 이때 마우스를 클릭하면 반원 e와 선분 CD의 교점 J가 작도됩니다. ‘점을 중심으로 회전’ 도구를 선택합니다. 차례로 점 J를 선택하고 점 G를 선택합니다. 점을 중심으로 회전 창에서 각에 60° 를 입력하고 반시계 방향을 선택하고 확인을 누릅니다. 점 J'이 작도됩니다. ‘다각형’ 도구를 선택하고 차례로 점 G를 선택하고 점 J를 선택하고 점 J'를 선택하고 다시 점 G를 선택하면 정삼각형이 만들어 집니다. 이런 방식으로 수 α 가 150, 210, 270, 330일 때 같은 방법으로 정삼각형을 차례로 만들어 나가면 됩니다.

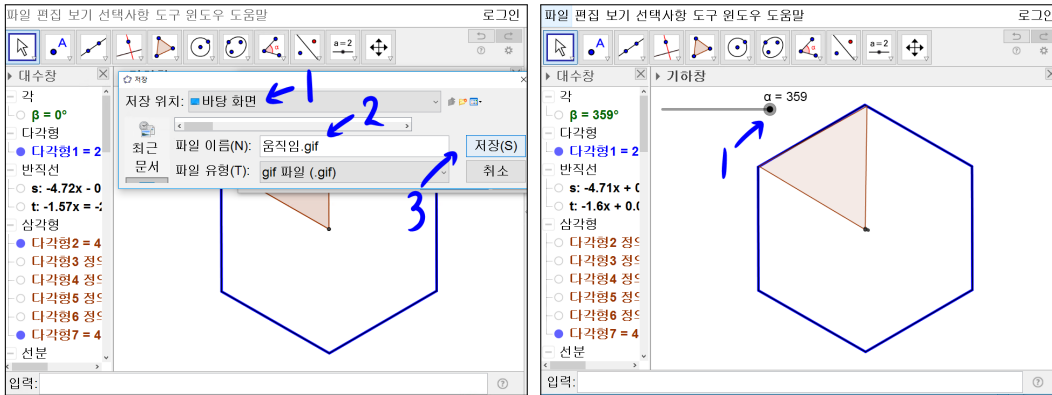


그림처럼 대수창에 있는 다각형1 앞의 작은 원을 클릭합니다. 그러면 맨 처음 그렸던 정육각형이 나타납니다. 그리고 그림처럼 육각형과 삼각형 이외의 대상들을 보이지 않게 설정합니다. 변과 만나지 않는 점만 이름을 보이지 않게 하고 그 점에서 오른쪽 마우스를 선택하고 자취 보이기를 선택합니다. 수 α 가 30, 90, 150, 210, 270일 때에도 같은 방식으로 설정합니다. 또한 변과 만나지 않는 점만 이름을 보이지 않게 하고 그 점에서 오른쪽 마우스를 클릭하여 자취 보이기를 선택합니다. 그리고 수 α 에 ‘애니메이션 시작’을 선택하면 자동으로 수 α 의 값이 증가하여 359까지 됩니다. 또한 359에서 순간 0으로 수 α 의 값이 변합니다. 그리고 변과 만나지 않는 정삼각형의 꼭짓점의 자취가 그림처럼 그려집니다.



제 1 장 GEOGEBRA를 활용한 문제탐구

이제 이 자료를 움직이는 그림으로 만들겠습니다. 우선 수 α 의 값을 0으로 만들고 [Ctrl]를 누른 상태에서 [F]를 누르고 자취를 사라지게 합니다. 파일을 선택하고 내보내기를 선택한 다음 기하창을 움직이는 GIF로 저장을 선택합니다. 슬라이더 $\alpha = 0$ 을 확인하고 프레임 당 시간에 50을 입력하고 ‘애니메이션 반복’을 선택합니다. 그리고 ‘내보내기’를 선택합니다.



저장 창에서 저장위치를 정하고 파일 이름을 입력하고 저장을 누르고 잠시 기다립니다. 아마도 컴퓨터가 잠시 멈추어서 아무것도 안하는 것처럼 보일 것입니다. 하지만 지금 수 α 의 값이 0에서 359까지 변하면서 움직임.gif 파일을 생성되고 있는 중일 것입니다. 한 참을 기다린 후에 저장 된 폴더를 보면 움직임.gif 파일이 생성되었을 것입니다. 이를 선택하여 그림을 열어보면 정육각형 안에 정삼각형이 미끄러지듯 움직이면서 변과 만나지 않는 꼭짓점의 자취가 어떻게 그려지는지를 보여주는 자료가 만들어졌을 것입니다.

주어진 문제풀이를 할 때 이 움직이는 그림 자료를 활용하여 학생들과 공유한다면, 학생들이 이 문제에 대하여 쉽게 이해할 수 있을 것입니다. 또한, 학생들과 이런 자료를 같이 만든다면 기하에 대하여 친숙해지는 계기가 되리라 생각합니다.

아마도 벌써 이 문제를 해결했을 것입니다. 자세한 계산은 일단 여기서는 생


략하겠습니다. 그런데 이렇게 하는 작도 말고도 다른 방법이 있을 수 있겠다고 생각하실 수 있습니다. 예를 들면 원에서 바로 교점을 작도할 수도 있었을 터인데 왜, 반원까지 그려가면서 이 자료를 만들었을까? 하는 의문을 가지실 것입니다. 사실 처음에는 원에서 교점을 그려가며 만들었는데 이상하게도 이렇게 할 경우 그림이 깨지는 모습이 보여 집니다. 아마도 교점을 만들 때, 위치에 따라 2개 이상의 교점이 만들어 질 경우 컴퓨터가 임의로 하나를 선택하는 것으로 보입니다. 즉, 의도와 다른 점이 선택되면, 의도하지 않았던 결과가 나옵니다. 지금 만든 자료가 수 α 의 값이 변하면서 나타났다가 사라지는 교점이 있어서 사라졌다가 나타날 때 생길 수 있는 교점이 임의로 선택되지 않도록 해야 원하는 자료를 얻을 수 있을 것입니다. 반드시 하나의 교점만 생성되는 식으로 만들어야 하는 것입니다. 즉, 원을 사용하면 사라졌다가 나타날 때, 두 개 이상의 교점 중에서 한 교점이 임의로 선택되지만, 반원을 사용할 경우 교점이 하나뿐이어서 교점이 사라졌다가 나타날 때 반드시 한 교점이 결정되어 자료를 원하는 방향으로 만들 수 있게 되는 것입니다. 조금 억지스러운 방법으로 자료를 만든 이유에 대하여 간략히 말씀 드렸습니다. 실제로 자료가 원하지 않는 방향으로 만들어지는 상황을 경험해 봐야 제가 지금 설명한 부분에 공감을 할 것이라 생각합니다.

찾아보기

- 교점, 9
- 기하창을 움직이는 GIF로 저장, 14
- 다각형, 12
- 두 점을 지나는 반원, 11
- 라디안, 8
- 반직선, 8, 10
- 선분, 7
- 슬라이더, 8
- 애니메이션 반복, 14
- 애니메이션 시작, 13
- 애니메이션 탭, 8
- 이름 보이기, 9
- 점, 10
- 점으로부터 대상을 확대, 6
- 점을 중심으로 회전, 11
- 정다각형, 4
- 정육각형, 4
- 주어진 크기의 각, 8
- 중심이 있고 한 점을 지나는 원, 7
- 중점 또는 중심, 6
- 직선에 대하여 대칭, 6
- 컴퍼스, 10

그동안 했던 강의 자료 중 일부를 책으로 엮음.

<http://min7014.iptime.org/math/2017063002.htm>



수학교사와 학생을 위한

한국교원대학교 융합교육연구소 추천 도서

지자 민은기

Geogebra와 수학의 시각화

지자 민은기 | 이경수

Geogebra를 활용한 수업자료 제작과 수학기초 탐구활동

지자 민은기

강원대학교 사범대학 수학교육과를 졸업하고 POSTECH 수학과에서 석사학위를 받았습니다. 경선중학교, 문막중학교, 강원과학고등학교, 세종과학예술경영학교에서 근무하였고 현재는 김해 삼정중학교에서 학생들을 지도하고 있습니다. 중학교, 과학고, 영재학교에서 학생들을 지도한 경험을 바탕으로 일급교사자격연수 및 영재인 등에서 수학자료 만들기에 대한 강의를 해왔습니다.


- 2017년 경남과학고등학교 수학과 현장연구 특강
- 2017년 세종청의과학캠프(수학)특강
- 2016년 강원도 중등 수학과 좋은 수업 만들기 직무연수 출강
- 2013년~2016년 강원도 중등수학과(급)정교사 자격연수 출강
- 2014년~2015년 YSC 강원도청소년과학캠프 창의력 문제 출제 및 심사

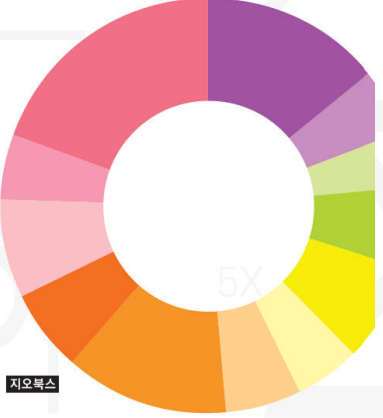
지자 이경수

강원대학교 사범대학 수학교육과를 졸업한 후 학교현장에서 즐거운 수학교육을 만들고자 노력하고 있습니다. 프로그래밍에 흥미가 있어 Geogebra, SageMath 등의 소프트웨어로 수업자료를 만드는 활동을 즐겨하고 있으며 이를 수업에 효율적으로 적용할 수 있는 방법을 고민하고 있습니다. 특히, 통계관련 시뮬레이션 자료를 제작하는 활동에 관심이 많습니다.

- 2017년 현재 원주여자고등학교 재직 중
- 2015년~2017년 단위학교 맞춤형 직무연수 출강
- 2016년 교육부 중앙교육연수원 [융합과 미래] 콘텐츠 개발
- 2016년 강원도 중등 수학과 좋은 수업 만들기 직무연수 출강
- 2013년~2016년 강원도 중등수학과(급)정교사 자격연수 출강
- 2015년~2016년 YSC 강원도청소년과학캠프 창의력 문제 출제 및 심사

지오박스






지오박스

지오박스

T 02-2263-6414 F 02-2268-9481
www.emotionbooks.co.kr





<https://ggbm.at/gsARCQs5>

책자료실(지오지브라 튜브)

[참고]

[민은기 선생님의 수학자료실]

Homepage : <http://min7014.iptime.org>

Facebook Page : <https://www.facebook.com/mineungimath>

YouTube Channel : <https://goo.gl/JpzU5i>

[이경수 선생님 블로그]

<http://blog.naver.com/evening07>

[GeoGebra 5.0.363.0-3D (03 June 2017) 설치파일]

Installer : <https://goo.gl/YvjsCV> (From Home Page)

Installer : <https://goo.gl/n69yE1> (From Google Drive)

[GeoGebra 5.0.462.0-d (02 May 2018) 설치파일]

Installer : <https://goo.gl/SsdFBd> (From Home Page)

Portable : <https://goo.gl/FxJxES>(From Home Page)

Installer : <https://goo.gl/dqtbfk> (From Google Drive)

Portable : <https://goo.gl/zwundc>(From Google Drive)