
마지막 변경일 2018년 5월 7일

** 중심극한정리 **

Geogebra와 수학의 시각화 책의 3.4소절 내용임.

<http://min7014.iptime.org/math/2017063002.htm>

가장 최근 파일은 링크를 누르면 받아 보실 수 있습니다.

<https://goo.gl/cnn3U2>

<http://min7014.iptime.org/math/2018011204.pdf>

자료의 수정이 필요한 부분이 있으면 언제든지

민은기 E-mail : min7014@nate.com

이경수 E-mail : ksteach81@gmail.com

으로 연락주시면 감사하겠습니다.

강의록을 보기전에 프로그램 설치를 반드시 읽어보시고 꼭 지오지브라 클래식 5를 설치하시기 바랍니다.

<https://goo.gl/wqwJ6v>

<http://min7014.iptime.org/math/2018011001.pdf>

* 주요변경내역 *

2017.06.24 Geogebra와 수학의 시각화 책에 엮어 출간.

차례

차례	i
제 1 장 Geogebra를 활용한 통계	1
1.1 중심극한정리	2
1.1.1 모집단 생성하기	2
1.1.2 표본의 크기 설정하기	3
1.1.3 표본추출 버튼 만들기	4
1.1.4 모집단의 히스토그램 그리기	8
1.1.5 표본평균의 히스토그램 그리기	10
1.1.6 좌표축의 범위 설정하기	12
1.1.7 자동화 버튼과 멈춤 버튼 만들기	13
1.1.8 스프레드시트를 활용하여 표 구성하기	15
찾아보기	19

제 1 장

Geogebra를 활용한 통계

1.1 중심극한정리

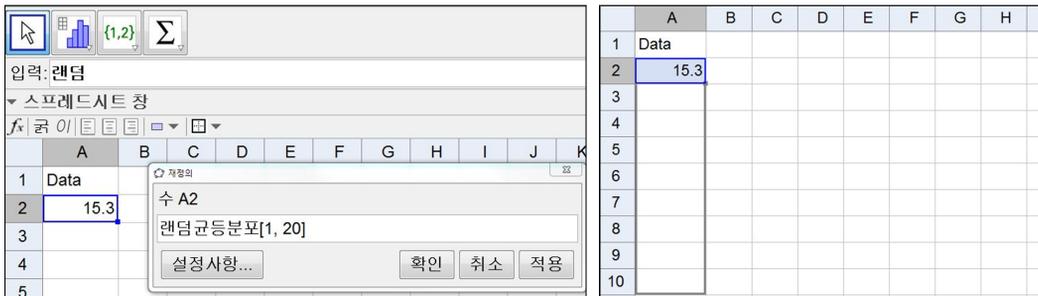
모집단이 어떤 분포를 따르든 표본의 크기를 충분히 크게 하여 추출한 표본평균의 분포는 극한적으로 정규분포를 따릅니다. 통계에서는 이것을 중심극한정리(Central Limit Theorem)라고 부릅니다. 보통 모집단의 각종 통계량을 조사할 때 시간과 비용이 많이 소요되는 전수조사보다는 그 보다 훨씬 경제적인 표본조사를 통해 추정을 하는데 중심극한정리는 이것의 유효성을 뒷받침해주는 이론적 바탕이라 할 수 있습니다. 이번 장에서는 균등분포로 구성한 모집단에서 표본을 추출해 보고, 표본평균의 분포가 어떤 모양을 만들어 가는지 관찰해 볼 수 있는 자료를 만들겠습니다. 더 나아가 표본의 크기는 분포의 모양에 어떤 영향을 주는지 관찰해 볼 수 있도록 크기가 서로 다른 2개의 추출과정을 한 화면에 두어 비교 관찰이 가능하도록 자료의 내용을 구성해 보겠습니다.

1.1.1 모집단 생성하기

모집단의 데이터를 생성하기 위해 스프레드시트 창을 엽니다. A1셀을 더블 클릭하여 'Data'를 입력, A2셀에 다음 내용을 입력합니다.

랜덤균등분포[1,20]

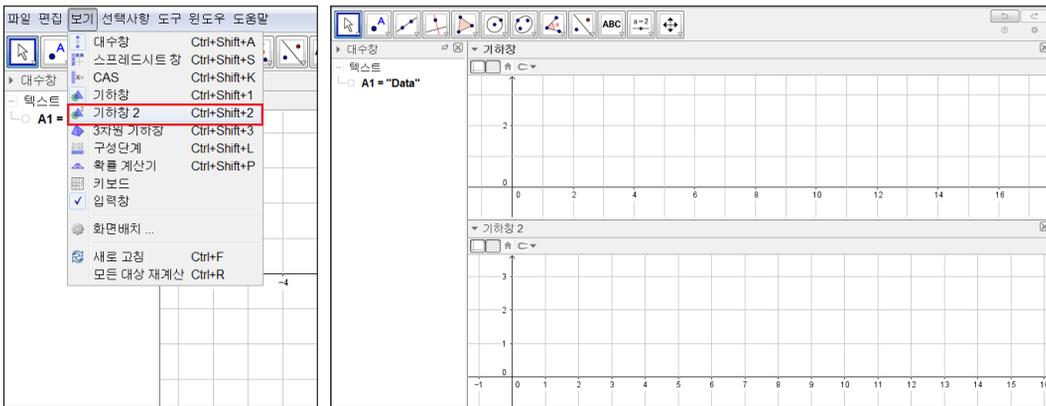
※ 랜덤균등분포[<최솟값>, <최댓값>]



위의 오른쪽 그림과 같이 A2셀에 [1,20] 범위의 균등분포에서 임의로 추출한 값이 나타납니다. 이러한 값을 200개 정도 만들어 보겠습니다. A2셀을 선택 하면 셀의 오른쪽 아래에 파란색 정사각형이 나타납니다. Excel에서는 이것을 채우기 핸들이라 부르는데, 이것을 클릭한 채로 아래로 내려 보겠습니다. 그러면 아래쪽의 셀들도 1부터 20까지의 값들로 채워지게 됩니다. A2셀부터 시작 했으므로 A201셀까지 채워야 200개의 데이터가 되는 것이지만 여기서 정확한 개수는 중요하지 않습니다.

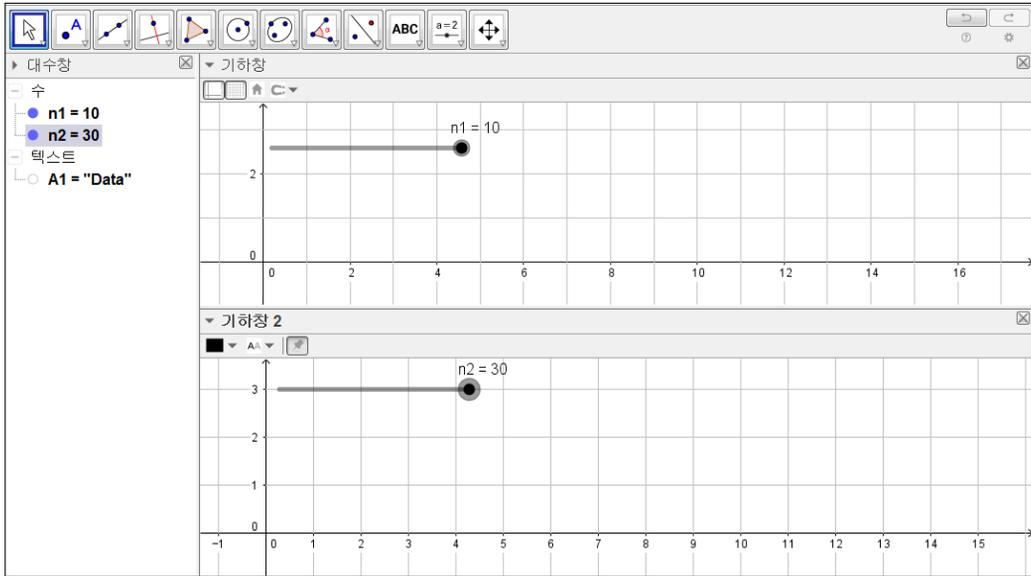
1.1.2 표본의 크기 설정하기

다음으로 화면에 기하창2를 추가로 띄우겠습니다. 이는 표본의 크기가 서로 다른 두 표본평균의 분포를 비교하기 위해서입니다. 아래 왼쪽 그림과 같이 보기에서 기하창2를 선택하여 두 번째 기하창을 열어줍니다. 그리고 기하창의 머리 부분을 잡아 아래 오른쪽 그림과 같이 위 아래로 배치해 줍니다.



다음으로 표본의 크기를 조절할 수 있는 슬라이더를 만들겠습니다. 이름은 n.1, 범위는 [1,10]의 정수로 합니다. 기하창2에도 표본의 크기를 설정하는 슬라이더를 만들어 줍니다. 슬라이더의 이름은 n.2, 범위는 [11,30]의 정수로 합니다.

제 1 장 GEOGEBRA를 활용한 통계



1.1.3 표본추출 버튼 만들기

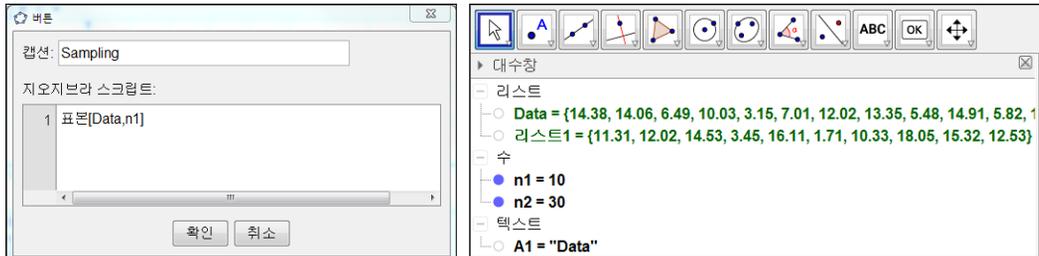
앞에서 만들어 놓은 모집단 Data에서 n_1 , n_2 를 크기로 하는 표본을 추출하는 버튼을 만들어 보겠습니다. 아래 왼쪽 그림과 같이 스프레드시트 창에서 A2셀 부터 A201셀까지를 드래그하여 블록으로 잡아줍니다. 그리고 마우스 오른쪽 버튼을 클릭하여 만들기 항목에서 리스트를 선택합니다.

그러면 대수창에 위의 오른쪽 그림과 같이 리스트가 만들어 집니다. 이 리스

트의 이름을 'Data'로 수정합니다. 그리고 'Sampling'이란 이름으로 버튼을 만들어 스크립트에 다음 내용을 작성합니다.

표본[Data,n1]

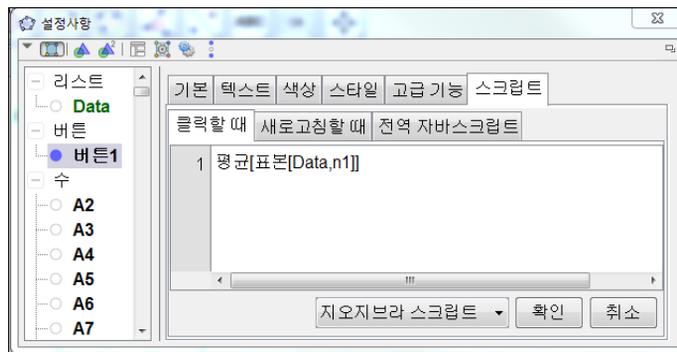
※ 표본[<리스트>, <크기>]



Sampling 버튼을 클릭해보면 위의 오른쪽 그림과 같이 대수창에 n1 만큼의 원소를 갖는 리스트가 생성되는 것을 확인할 수 있습니다. 명령어 '표본'은 첫 번째 인자에 해당하는 리스트에서 두 번째 인자의 수만큼 데이터를 추출하여 리스트로 만드는 역할을 합니다. 그러면 다시 리스트1을 삭제하겠습니다. 그리고 Sampling 버튼의 설정사항으로 들어가 스크립트를 다음과 같이 수정합니다.

평균[표본[Data,n1]]

※ 평균[<원자료의 리스트>]



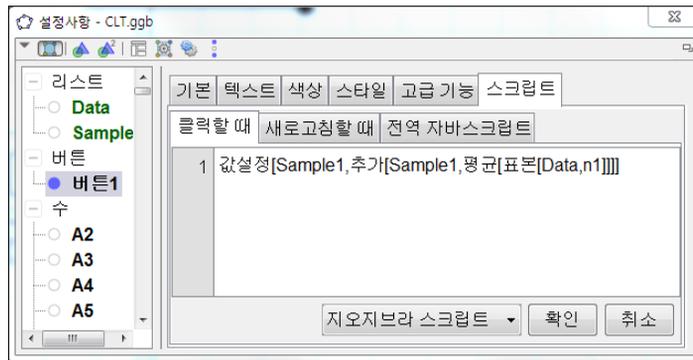
제 1 장 GEOGEBRA를 활용한 통계

스크립트를 닫고 Sampling 버튼을 다시 클릭해 보면 새로운 수가 생성되는 것을 볼 수 있습니다. 이는 임의로 추출된 표본들의 평균입니다. 이 수를 다시 삭제합니다. 이제 위에서 작성한 표본평균에 관한 수식을 조금 더 확장하여 표본평균들을 누적시키는 리스트를 만들어 보겠습니다. 입력창에 다음을 입력합니다.

```
Sample1={}
```

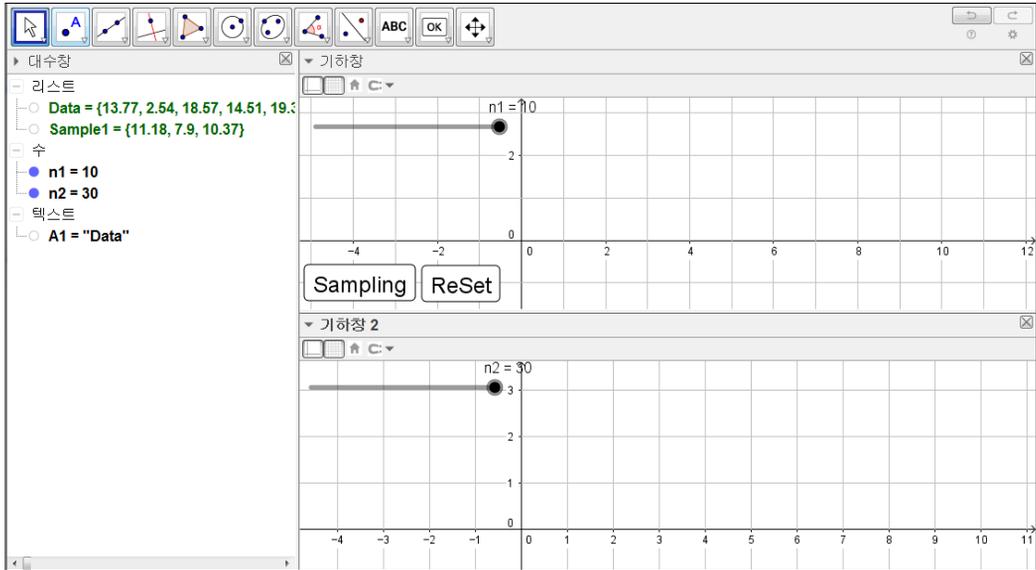
그리고 Sampling 버튼의 설정사항에서 스크립트를 다음과 같이 수정합니다.

```
1번 줄 : 값설정[Sample1,추가[Sample1,평균[표본[Data,n1]]]]
```



이 버튼을 클릭할 때마다 Sample1 리스트에 n1 크기로 추출한 표본의 평균이 차례대로 누적되는 것을 볼 수 있습니다. 여기에서 초기화 버튼도 함께 만들어 보겠습니다. 'ReSet'이란 이름의 버튼을 추가로 생성하고 스크립트에 다음을 입력합니다.

```
1번 줄 : Sample1={}
```



이제 Sample1을 생성하고 초기화한 내용을 바탕으로 Sample2를 생성하고 초기화하는 내용을 작성하겠습니다. 입력창에 다음 내용을 입력하여 리스트 Sample2를 만들어 줍니다.

```
Sample2={}
```

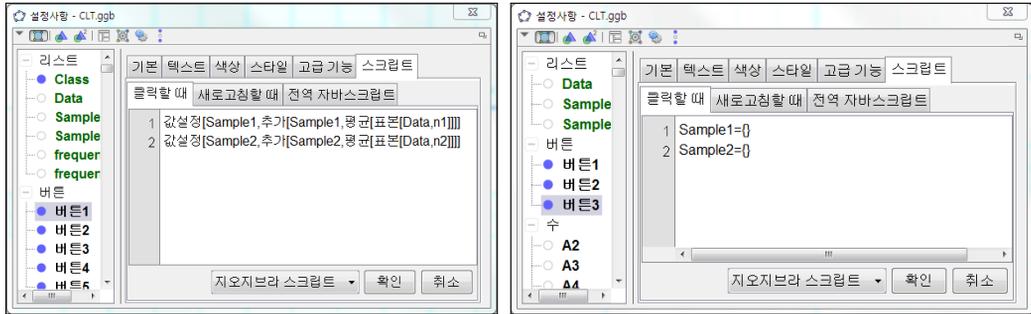
그리고 기존에 만들어 놓은 Sampling과 Reset 버튼의 스크립트가 다음 내용과 같게 되도록 2번 줄을 추가로 작성해 줍니다.

```
1번 줄 : 값설정[Sample1,추가[Sample1,평균[표본[Data,n1]]]]
2번 줄 : 값설정[Sample2,추가[Sample2,평균[표본[Data,n2]]]]
```

```
1번 줄 : Sample1={}
2번 줄 : Sample2={}

```

제 1 장 GEOGEBRA를 활용한 통계



1.1.4 모집단의 히스토그램 그리기

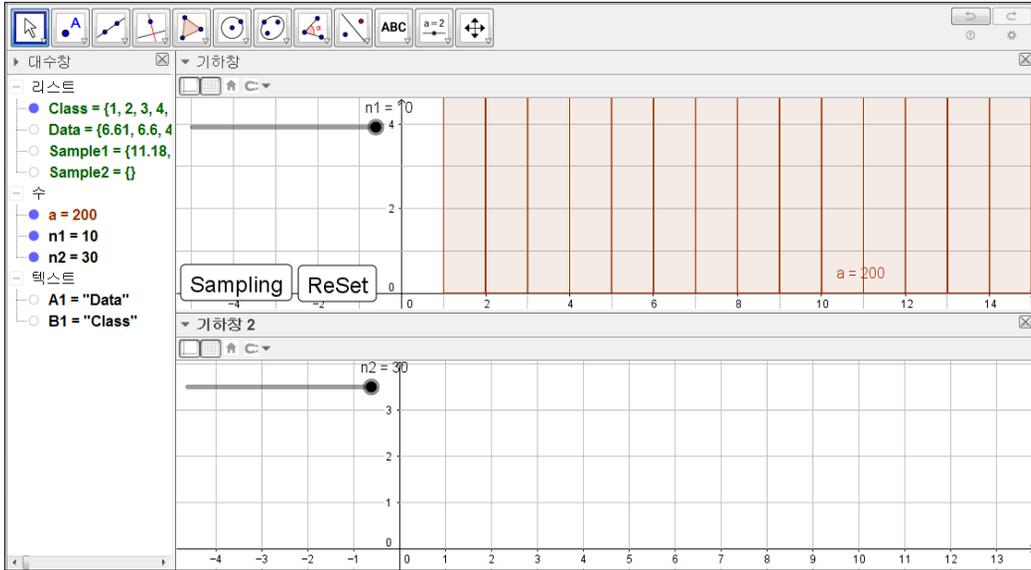
모집단 Data의 히스토그램을 그리기 위해 계급의 경계값 리스트를 만들겠습니다. 스프레드시트 창을 열어 B1셀에 'Class'를 입력하고, B2셀에서 B21셀까지 1부터 20까지의 정수를 입력합니다. 1부터 20까지의 정수를 입력할 때에는 1과 2를 각각 B2셀, B3셀에 입력하고, 아래 왼쪽 그림과 같이 이 두 셀을 블록으로 잡았을 때 나타나는 채우기 핸들을 아래로 잡아 끌어주는 방법을 이용합니다.

	A	B	C
1	Data	Class	
2	6.61	1	
3	6.6	2	
4	4.76		
5	13.24		

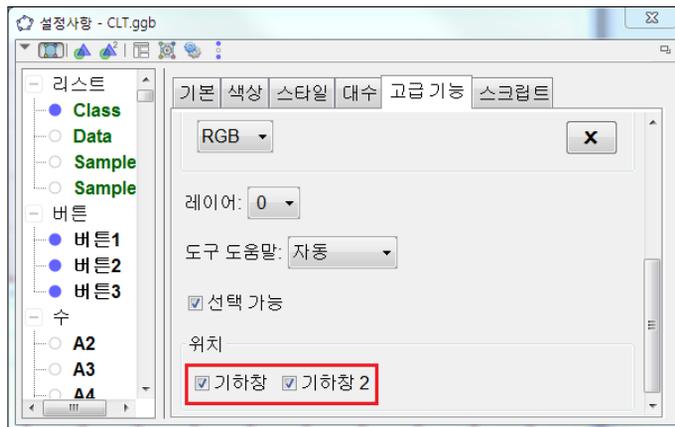
Data 리스트를 만들 때와 마찬가지로 B2셀에서 B21셀까지를 블록으로 잡아 마우스 오른쪽 버튼을 클릭하여 Class의 리스트를 만들어 줍니다. 그리고 대수창에서 이름을 'Class'로 수정합니다. 이제 이것을 바탕으로 히스토그램을 그리겠습니다. 입력창에 다음 내용을 입력합니다.

히스토그램[Class,Data,true]

※ 히스토그램[<계급의 경계값의 리스트>,<원자료의 리스트>,<밀도사용>]

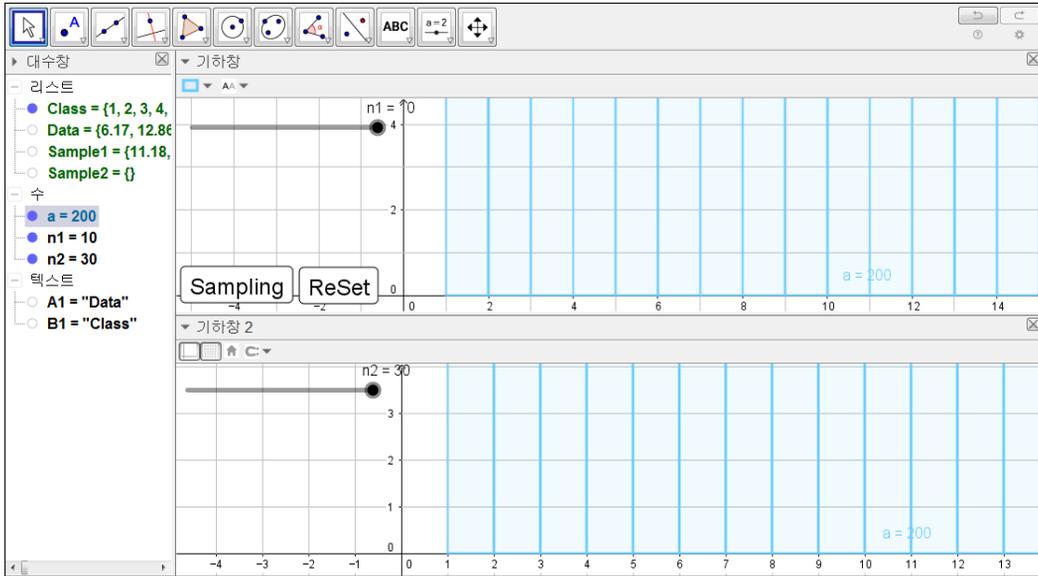


그리고 히스토그램의 설정사항으로 들어가 고급기능의 아랫부분을 보면 대상이 놓이게 되는 위치를 설정할 수 있는 항목이 있습니다. 기하창과 기하창2에 모두 체크를 하여 히스토그램이 두 기하창에 모두 그려지게 합니다.



제 1 장 GEOGEBRA를 활용한 통계

이때 모집단의 히스토그램은 비교 자료가 되어야 하므로 옅은 색상으로 지정해 주도록 합니다.



1.1.5 표본평균의 히스토그램 그리기

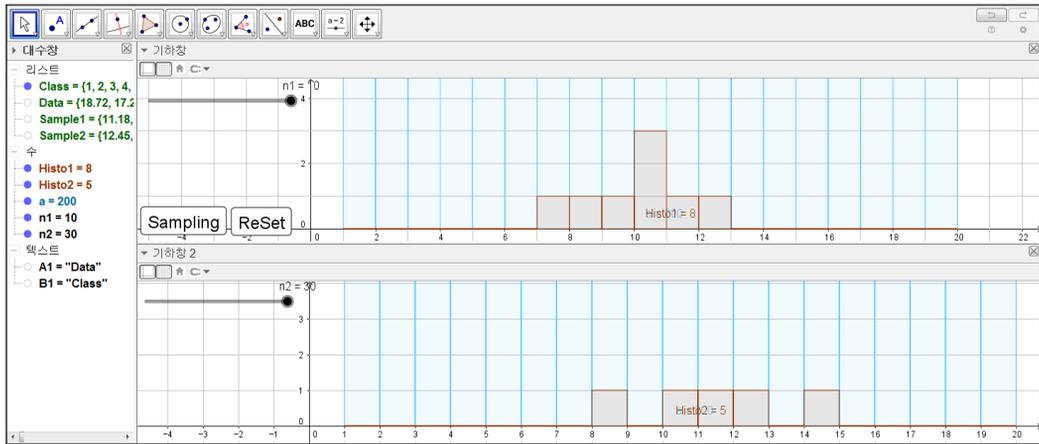
앞 절에서 모집단의 히스토그램을 그린 것처럼 표본평균의 히스토그램을 그려보겠습니다. 입력창에 다음 내용을 입력합니다.

```
Histo1=히스토그램[Class,Sample1,true]
```

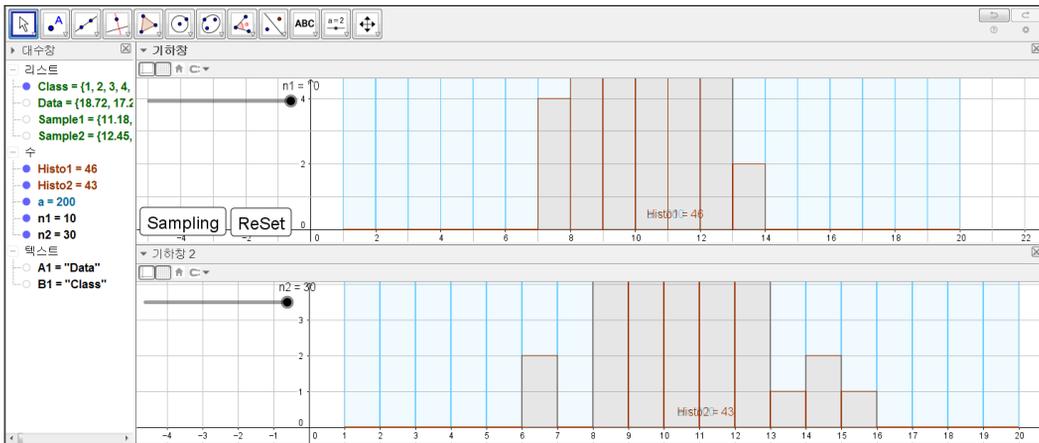
```
Histo2=히스토그램[Class,Sample2,true]
```

히스토그램의 설정사항에서 Histo1은 기하창에 Histo2는 기하창2에 그려지도록 설정합니다. 앞 절에서 모집단의 히스토그램을 기하창과 기하창2에 모두 배치시킨 방법과 마찬가지로 방법입니다. 히스토그램 Histo1의 설정사항의 고급기

능에서 기하창에만 체크를 하고, 히스토그램 Histo2의 설정사항의 고급기능에서 기하창2에만 체크를 합니다. 그러면 Histo1은 기하창에만 나타나고, Histo2는 기하창2에만 나타나게 됩니다. 이와 같은 방법을 이용하면 히스토그램뿐만 아니라 다른 대상들도 그것이 보여지는 기하창을 선택할 수 있습니다.



위의 그림과 같이 모집단의 분포 위에 표본평균의 분포가 그려지게 됩니다. 그러나 Sampling 버튼을 더 많이 클릭해 보면 아래 그림과 같이 히스토그램이 높게 치솟아 분포의 모양을 가늠하기 어려운 상황이 나타나게 됩니다.



1.1.6 좌표축의 범위 설정하기

앞 절에서 발생한 문제를 해결하기 위해 히스토그램의 최댓값이 커짐에 따라 y 축의 눈금이 축소되도록 설정해 보겠습니다. 입력창에 다음을 입력합니다.

```
frequency1=도수[Class,Sample1]
frequency2=도수[Class,Sample2]
```

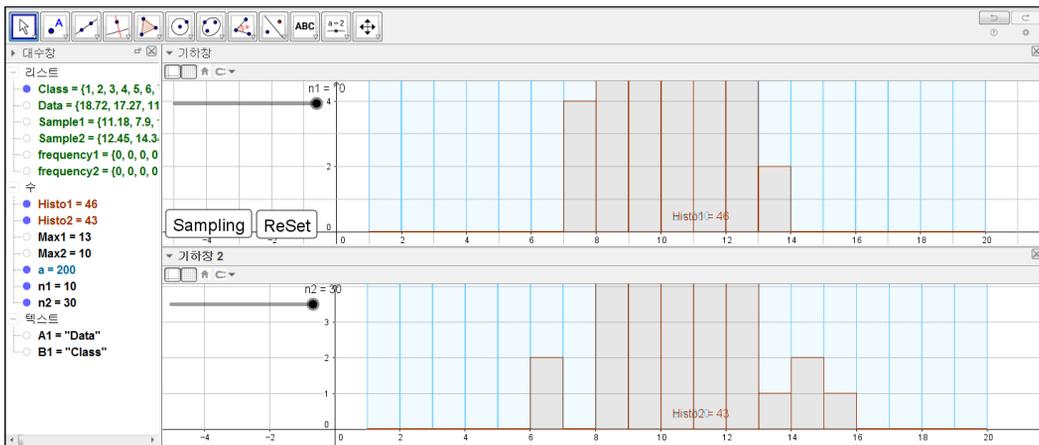
※ 도수[<계급 경계의 리스트>,<원자료의 리스트>]

‘도수’ 명령어를 통해 Class로 나누어진 계급에 속하는 데이터의 수를 구할 수 있었습니다. 그리고 ‘최댓값’ 명령어를 사용하여 도수의 리스트에서 최댓값을 구합니다.

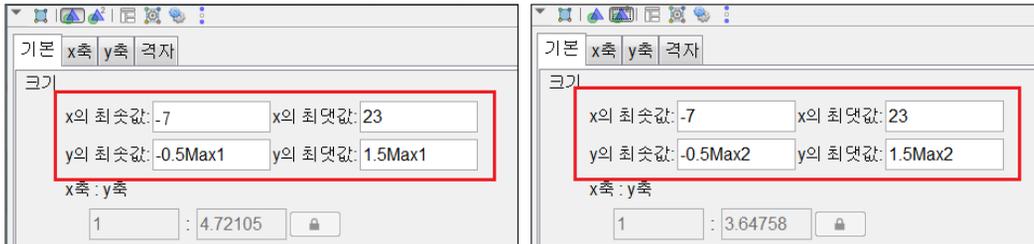
```
Max1=최댓값[frequency1]
Max2=최댓값[frequency2]
```

※ 최댓값[<리스트>]

‘최댓값’ 명령어는 하나의 리스트를 인자로 받거나 여러 개의 수들을 인자로 받아 최댓값을 출력해 주는 함수입니다. 그리고 함수와 그 함수의 특정 구간을 인자로 받는 경우에도 최댓값을 구해줍니다.



다음으로 기하창의 설정사항에서 x 축의 최솟값과 최댓값을 각각 -7 , 23 으로 그리고 y 축의 최솟값과 최댓값을 각각 $-0.5*Max1$, $1.5*Max1$ 으로 설정합니다. 기하창2의 설정사항에서도 x 축의 최솟값과 최댓값을 각각 -7 , 23 으로 y 축의 최솟값과 최댓값을 각각 $-0.5*Max2$, $1.5*Max2$ 으로 설정합니다. 이는 기하창에서 x 축과 y 축이 보이는 범위를 설정해준 것입니다. 모집단의 확률변수 X 의 범위와 버튼들이 놓일 위치를 고려하여 x 의 범위를 -7 부터 23 까지로 설정하였습니다. 그리고 y 의 범위에서 최댓값을 $1.5*Max1$ 으로 설정함으로써 가장 큰 빈도수 보다 1.5 배 큰 수로 y 축의 최댓값이 설정되도록 하여 빈도수가 커지더라도 그래프의 위쪽 끝이 계속 보일 수 있게 하였습니다.



1.1.7 자동화 버튼과 멈춤 버튼 만들기

먼저 자동화 버튼을 만들어 보겠습니다. ‘auto’라는 이름의 슬라이더를 생성하고 설정사항의 스크립트(새로 고침할 때)에 다음 내용을 입력합니다.

```
값설정[Sample1,추가[Sample1,평균[표본[Data,n1]]]]
값설정[Sample2,추가[Sample2,평균[표본[Data,n2]]]]
```

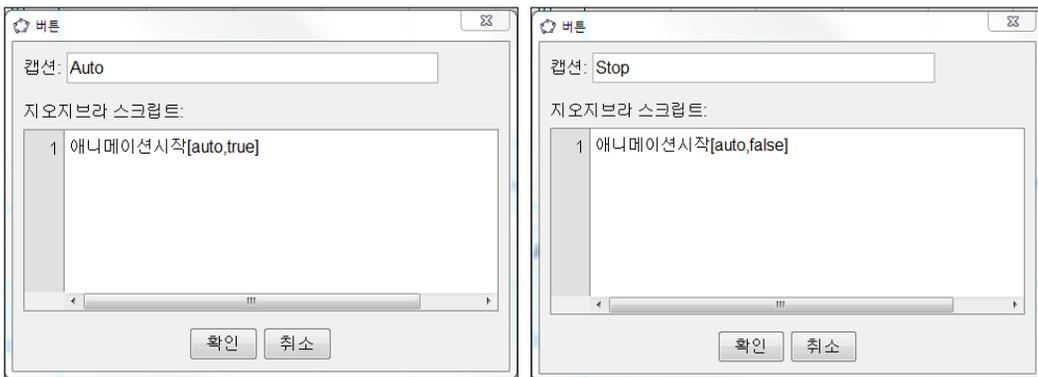
슬라이더를 움직일 때마다 표본이 추출됨을 확인할 수 있습니다. 다음으로 버튼을 통해 슬라이더가 제어되도록 슬라이더에 애니메이션을 주는 버튼과 애니메이션을 멈추는 버튼을 만들어 보겠습니다. 그러면 ‘Auto’라는 이름의 버튼을 추가로 생성하고 스크립트에 다음 내용을 입력합니다.

제 1 장 GEOGEBRA를 활용한 통계

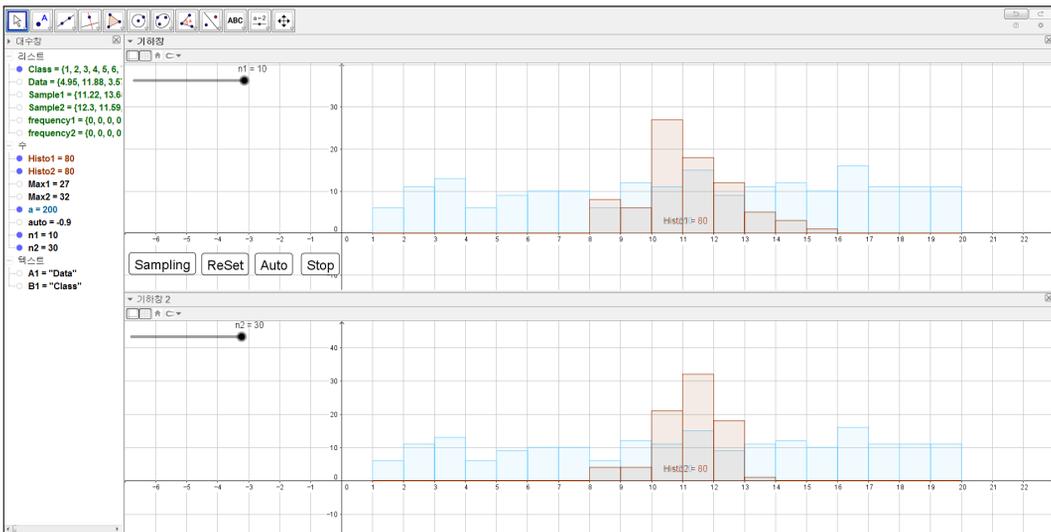
애니메이션시작[auto,true]

그리고 ‘Stop’이란 이름의 버튼을 추가로 생성하고 스크립트에 다음 내용을 입력합니다.

애니메이션시작[auto,false]



‘auto’ 슬라이더를 보이지 않게 설정하고 버튼들의 위치를 적당히 정렬합니다.



1.1.8 스프레드시트를 활용하여 표 구성하기

마지막 절에서는 표본추출과정을 수치로 보여주는 표를 만들어 보겠습니다. 먼저 모집단의 평균, 분산, 표준편차를 보여주는 표를 만들기 위해 스프레드시트에 다음 내용을 입력합니다. 참고로 그리스어는 입력창에 표시된(입력창을 클릭하면 나타남) α 를 클릭하면 찾을 수 있습니다.

$E(Data)$	=평균[Data]
$V(Data)$	=분산[Data]
$\sigma(Data)$	=표준편차[Data]

아래 그림과 같이 모집단의 평균, 분산, 표준편차의 값을 모두 입력합니다.

▼ 스프레드시트 창					
fx					
	A	B	C	D	E
1	Data	Class	E(Data)	=평균[Data]	
2	4.95	1	V(Data)		
3	11.88	2	σ (Data)		
4	3.57	3			
5	7.17	4			
6	19.29	5			

그리고 앞에서 입력한 셀들을 드래그하여 블록으로 잡은 뒤 마우스 오른쪽 버튼을 클릭하여 표를 생성합니다.

▼ 스프레드시트 창										
fx										
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Data	Class	E(Data)	10.75						
2	6.64	1	V(Data)	29.64						
3	17.06	2	σ (Data)							
4	17.29	3								
5	1.83	4								
6	13.29	5								
7	11.76	6								
8	16.87	7								
9	14.83	8								
10	16.3	9								
11	19.23	10								
12	7.52	11								
13	13.44	12								

C1:D3

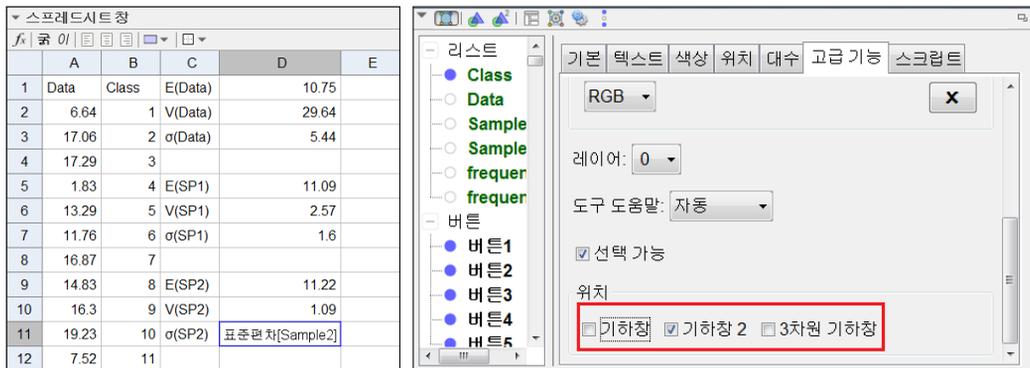
- 복사
- 붙이기
- 잘라내기
- 여러 대상 삭제
- 만들기
- 대상 보이기
- 스프레드시트에 기록
- 설정사항 ...
- 리스트
- 정의 리스트
- 행렬
- 표
- 다각선
- 연산표

제 1 장 GEOGEBRA를 활용한 통계

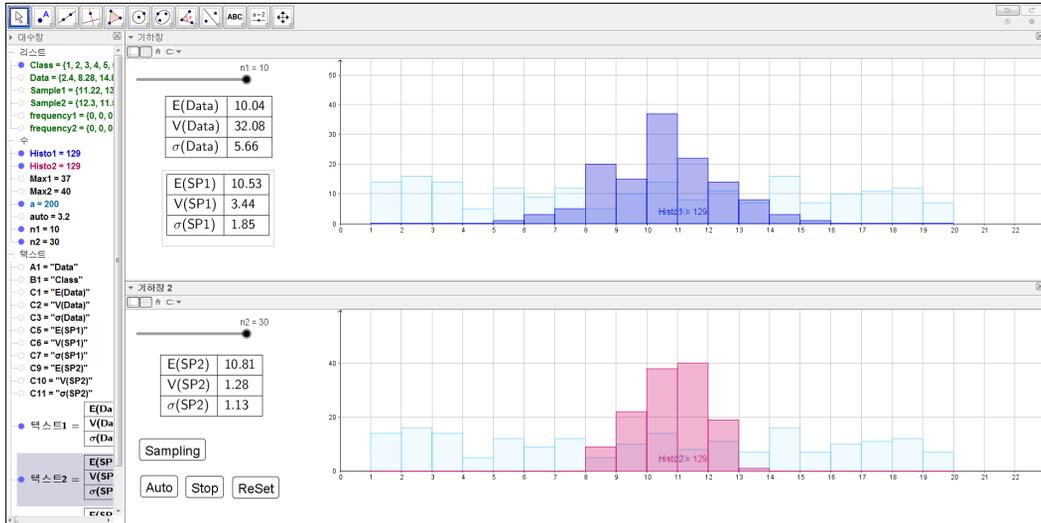
그러면 기하창에 표가 생성됩니다. 마찬가지로 방법으로 Sample1과 Sample2에 대한 표도 생성하겠습니다. 아래 표의 내용을 스프레드시트 창에 입력합니다.

n	=n1	n	=n2
$E(SP1)$	=평균[Sample1]	$E(SP2)$	=평균[Sample2]
$V(SP1)$	=분산[Sample1]	$V(SP2)$	=분산[Sample2]
$\sigma(SP1)$	=표준편차[Sample1]	$\sigma(SP2)$	=표준편차[Sample2]

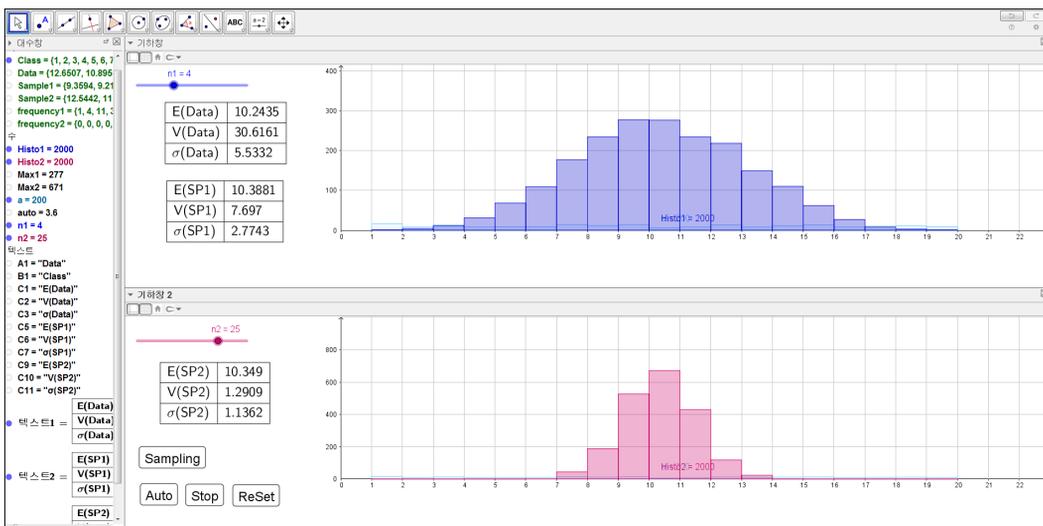
스프레드시트 창에 입력한 내용을 표로 생성하여 Sample1에 대한 표는 기하창에 위치시키고, Sample2에 대한 표는 기하창2에 위치시킵니다.



버튼들의 위치도 모두 기하창2로 옮겨서 가지런히 배치를 합니다. 그리고 히스토그램과 축의 설정을 다음 그림과 같이 보기 좋게 변경하면 중심극한정리에 대한 자료가 완성됩니다. 이 자료를 활용하여 표본평균의 분포는 극한적으로 정규분포를 따르게 됨을 실험을 통해 직접 관찰할 수 있습니다. 또한, 표본의 크기가 서로 다른 두 분포의 모양을 비교해 봄으로써 표본의 크기가 클수록 표본평균의 분포는 더 좁게 나타난다는 것을 알 수 있습니다.



다음은 시행의 횟수를 2000번으로 하였을 때, 즉, 표본평균 데이터가 2000개일 때 표본의 크기가 4와 25인 표본평균의 분포입니다. 표본을 추출하는 시행을 많이 하면 할수록 표본평균의 평균은 모평균으로 수렴해 가고 표본평균의 표준편차는 모표준편차를 \sqrt{n} 으로 나눈 값으로 수렴해 가는 것을 눈으로 확인해 볼 수 있습니다.



찾아보기

도수, 12

랜덤균등분포, 2

중심극한정리, 2

최댓값, 12

평균, 5

표본, 5

히스토그램, 9

그동안 했던 강의 자료 중 일부를 책으로 엮음.

<http://min7014.iptime.org/math/2017063002.htm>



수학교사와 학생을 위한

한국교원대학교 융합교육연구소 추천 도서

지자 민은기

Geogebra와 수학의 시각화

지자 민은기 | 이경수

Geogebra를 활용한 수업자료 제작과 수학문제 탐구활동

지자 민은기

- 2017년 경남과학고등학교 수학과 현장연구 특강
- 2017년 세종창의과학캠프(수학)특강
- 2016년 강원도 중등 수학과 좋은 수업 만들기 직무연수 출강
- 2013년~2016년 강원도 중등수학자(1)급정교사 자격연수 출강
- 2014년~2015년 YSC 강원도청소년과학캠프 창의력 문제 출제 및 심사

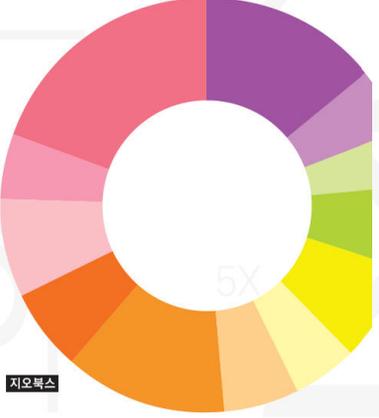
지자 이경수

강원대학교 사범대학 수학교육과를 졸업한 후 학교현장에서 즐거운 수학교육을 만들고자 노력하고 있습니다. 프로그래밍에 흥미가 있어 Geogebra, SageMath 등의 소프트웨어로 수업자료를 만드는 활동을 즐겨하고 있으며 이를 수업에 효율적으로 적용할 수 있는 방법을 고민하고 있습니다. 특히, 통계관련 시뮬레이션 자료를 제작하는 활동에 관심이 많습니다.

- 2017년 현재 원주여자고등학교 재직 중
- 2015년~2017년 단위학교 맞춤형 직무연수 출강
- 2016년 교육부 중앙교육연수원 [융합과 미래] 콘텐츠 개발
- 2016년 강원도 중등 수학과 좋은 수업 만들기 직무연수 출강
- 2013년~2016년 강원도 중등수학자(1)급정교사 자격연수 출강
- 2015년~2016년 YSC 강원도청소년과학캠프 창의력 문제 출제 및 심사

지오박스





지오박스

T 02-2263-6414 F 02-2268-9481
www.emotionbooks.co.kr





<https://ggbm.at/gsARCQs5>

책자료실(지오지브라 튜브)

[참고]

[민은기 선생님의 수학자료실]

Homepage : <http://min7014.iptime.org>

Facebook Page : <https://www.facebook.com/mineungimath>

YouTube Channel : <https://goo.gl/JpzU5i>

[이경수 선생님 블로그]

<http://blog.naver.com/evening07>

[GeoGebra 5.0.363.0-3D (03 June 2017) 설치파일]

Installer : <https://goo.gl/YvjsCV> (From Home Page)

Installer : <https://goo.gl/n69yE1> (From Google Drive)

[GeoGebra 5.0.462.0-d (02 May 2018) 설치파일]

Installer : <https://goo.gl/SsdFBd> (From Home Page)

Portable : <https://goo.gl/FxJxES>(From Home Page)

Installer : <https://goo.gl/dqtbfk> (From Google Drive)

Portable : <https://goo.gl/zwundc>(From Google Drive)