
마지막 변경일 2018년 5월 7일

** 큰 수의 법칙 **

Geogebra와 수학의 시각화 책의 3.1소절 내용임.

<http://min7014.iptime.org/math/2017063002.htm>

가장 최근 파일은 링크를 누르면 받아 보실 수 있습니다.

<https://goo.gl/Pny7Hy>

<http://min7014.iptime.org/math/2018010401.pdf>

자료의 수정이 필요한 부분이 있으면 언제든지

민은기 E-mail : min7014@nate.com

이경수 E-mail : ksteach81@gmail.com

으로 연락주시면 감사하겠습니다.

강의록을 보기전에 프로그램 설치를 반드시 읽어보시고 꼭 지오지브라 클래식 5를 설치하시기 바랍니다.

<https://goo.gl/wqwJ6v>

<http://min7014.iptime.org/math/2018011001.pdf>

* 주요변경내역 *

2017.06.24 Geogebra와 수학의 시각화 책에 엮어 출간.

차례

차례	i
제1장 Geogebra를 활용한 통계	1
1.1 큰 수의 법칙	3
1.1.1 주사위 던지는 버튼 만들기	3
1.1.2 결과 누적시키기	6
1.1.3 상대도수 구하기	8
1.1.4 막대그래프 표현하기	10
1.1.5 초기화 버튼과 자동화 버튼 만들기	12
1.1.6 자료의 제목과 상대도수 분포표 나타내기	14

제 1 장

Geogebra를 활용한 통계

사회적으로 통계의 역할이 커짐에 따라 학교에서도 통계교육의 중요성이 강조되고 있습니다. Geogebra에는 히스토그램, 막대그래프, 평균, 표본 등 통계와 관련된 다양한 함수들이 저장되어 있습니다. 또한 Microsoft Excel과 같이 다량의 데이터 처리가 가능한 스프레드시트 창이 있어 이들을 잘 활용하면 통계교육에 적합한 좋은 자료들을 만들 수가 있습니다. 이번 장에서는 큰 수의 법칙, 이항분포와 정규분포의 관계, 독립시행의 확률, 중심극한정리 그리고 뷔퐁의 바늘 문제를 실험을 통해 관찰할 수 있는 자료를 만들어 보도록 하겠습니다.

1.1 큰 수의 법칙

어떤 동일한 시행을 반복할 때 시행횟수가 많아질수록 특정한 사건에 대한 상대도수는 수학적 확률에 가까워집니다. 이것은 확률과 통계의 기본이 되는 법칙으로 큰 수의 법칙이라 부릅니다. 여기서는 큰 수의 법칙을 실험해 볼 수 있는 자료로써 가상 주사위 프로그램을 만들어 보고자 합니다.

1.1.1 주사위 던지는 버튼 만들기

각 면에 1부터 6까지의 자연수가 적혀 있는 일반적인 주사위가 있다고 하고, 그 주사위를 던졌을 때 결과가 나타나도록 하는 버튼을 만들어 보겠습니다. 물론 주사위의 각 면이 나올 가능성은 모두 동일하다고 가정합니다. Geogebra의 입력창에 다음과 같은 명령어를 입력해 봅니다.

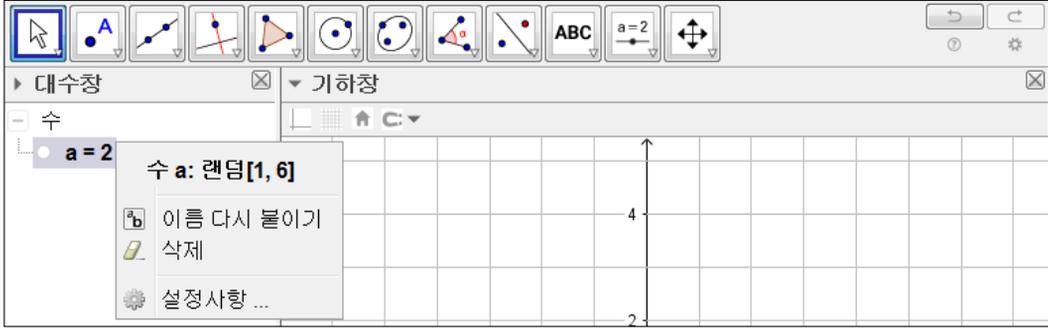
랜덤[1,6]

※ 랜덤[<최소정수>, <최대정수>] : 해당 범위의 정수를 임의로 출력

랜덤함수는 해당 범위의 정수 중 하나를 임의로 출력하는 함수입니다. 입력창에 위의 내용을 입력 후 엔터를 누르면 아래 그림과 같이 대수창에 변수가 만들어지게 됩니다. 여기서 변수의 값은 임의로 설정되기 때문에 만들 때 마다

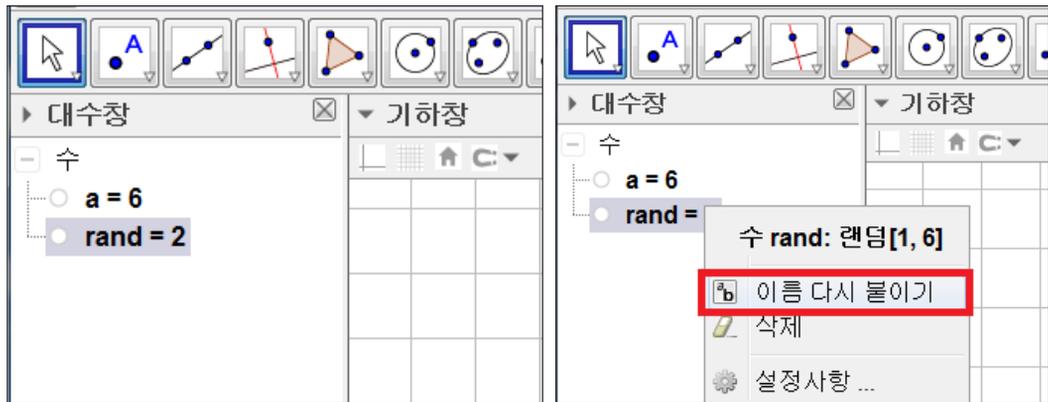
제 1 장 GEOGEBRA를 활용한 통계

다른 값일 수 있습니다. [Ctrl]+[R]을 눌러 봅니다. [Ctrl]+[R]은 모든 대상을 다시 계산하는 단축키로 이를 누를 때마다 변수에 설정된 값은 [1,6] 범위에서 불규칙적으로 변합니다.



참고로 위에서 한 것과 같이 별도의 이름을 만들어 주지 않으면 Geogebra는 변수 이름을 자동으로 부여합니다. 그러나 이는 프로그램의 가독성을 높이는 측면에서 볼 때 바람직한 것이 아닙니다. 따라서 변수 이름을 정의할 때에는 rand, line, point 등과 같이 그 변수가 무엇을 뜻하는지 알 수 있도록 하는 것이 여러 면에서 좋습니다. 그러면 입력창에 다음과 같이 입력해 보겠습니다.

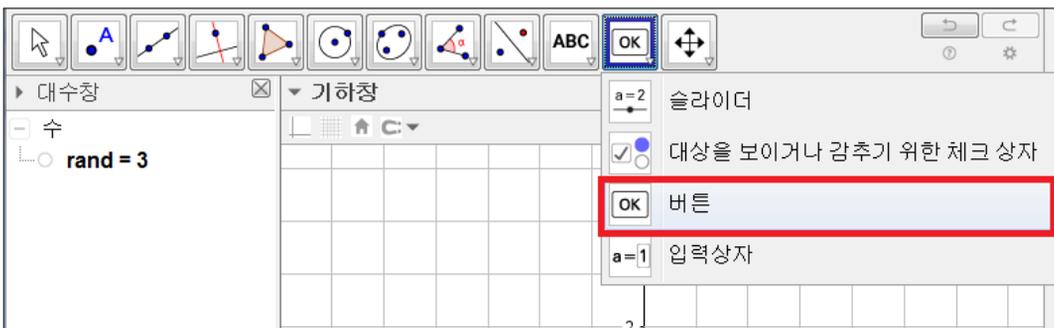
rand=랜덤[1,6]



위의 왼쪽 그림과 같이 rand라는 이름으로 변수가 만들어졌음을 확인할 수 있습니다. 이는 랜덤함수의 결과를 rand라는 이름의 변수에 넣으라는 의미로 해석할 수 있습니다. 물론 이미 만들어진 변수에서 이름을 수정하는 방법도 있습니다. 위의 오른쪽 그림과 같이 정의된 변수에 마우스 포인터를 올려놓고 오른쪽 버튼을 클릭하면 리스트가 나타납니다. 여기에서 ‘이름 다시 붙이기’를 클릭하면 이름을 수정할 수 있는 창이 나타납니다. 다음으로 주사위를 던지는 버튼을 만들어 보겠습니다. [Ctrl]+[R]을 눌러 주사위를 던지는 것은 사용자 입장에서 매우 번거로운 일입니다. 만약 [Ctrl]+[R] 대신 간단히 버튼을 클릭하여 다시 계산할 수 있다면 이 방법이 훨씬 직관적이고 간단한 방법이라 할 수 있습니다. [Ctrl]+[A]를 누르고 [Delete]키를 눌러 지금까지 작업한 내용을 모두 삭제하겠습니다. 그리고 입력창에 다음 내용을 입력합니다. 여기서 초깃값 1은 큰 의미를 가지지 않습니다.

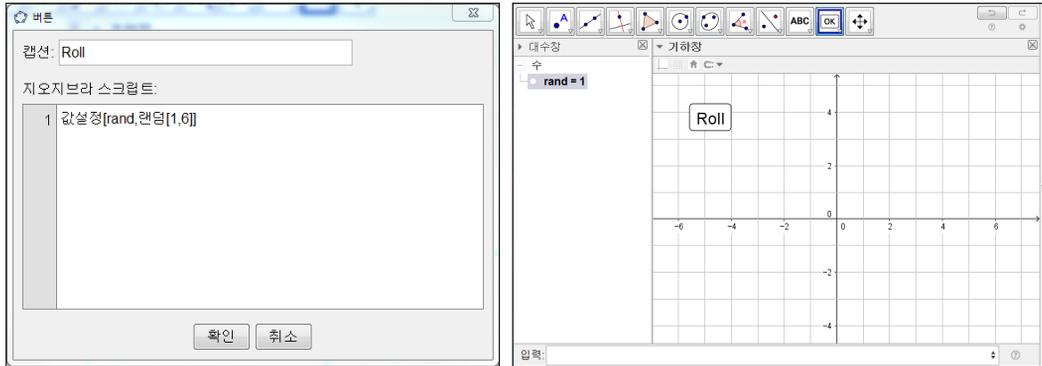
```
rand=1
```

그리고 도구모음에서 슬라이더가 포함된 도구를 아래로 펼쳐보면 아래 그림과 같이 버튼 도구가 나옵니다.



이것을 선택하고 이어서 바로 기하창의 여백을 클릭합니다. 그러면 아래 그림과 같이 버튼에 대한 명령어를 입력할 수 있는 스크립트 창이 나타납니다.

제 1 장 GEOGEBRA를 활용한 통계



캡션에 'Roll'이라 입력하고, 스크립트에는 다음 내용을 작성합니다.

```
값설정[rand,랜덤[1,6]]
```

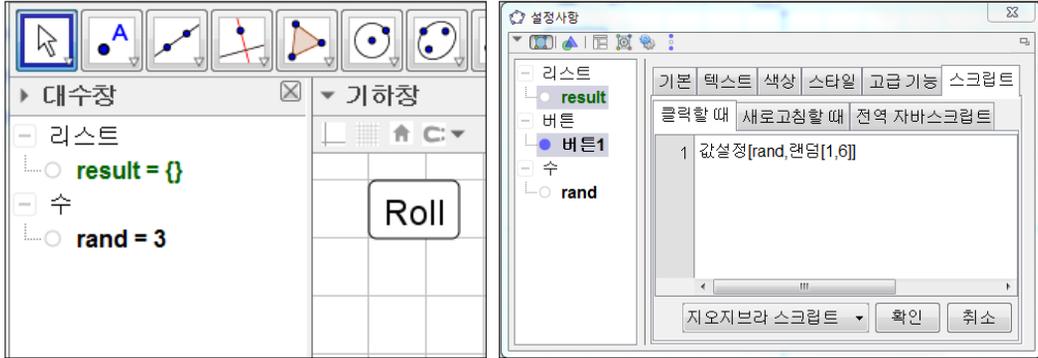
이는 [1,6] 범위에서 정수를 임의로 선택하고, 이미 정의되어 있는 rand라는 변수에 이 값을 넣으라는 의미입니다. 이때, 기존에 rand 변수에 들어있던 값은 지워지게 됩니다. 이제 확인을 클릭하여 스크립트 창을 닫습니다. 기하창에 만들어진 Roll이란 이름의 버튼을 클릭해 보면 rand 변수의 값이 [1,6] 범위에서 변하는 것을 확인할 수 있습니다. 이것으로 [Ctrl]+[R]을 대신할 수 있는 버튼이 생성되었습니다.

1.1.2 결과 누적시키기

시행횟수에 따른 상대도수를 관찰하기 위해서는 주사위를 던질 때마다 나오는 결과를 누적시킬 수 있어야 합니다. 리스트라는 것을 이용하면 이것을 가능하게 할 수 있습니다. 리스트는 수, 점, 선 등과 같이 Geogebra에서 다루는 대상의 한 유형으로써 수학적으로는 수열의 의미를 지니고 있고, 중괄호({ })를 이용하여 정의합니다. 입력창에 다음 명령어를 입력해 보겠습니다.

```
result={ }
```

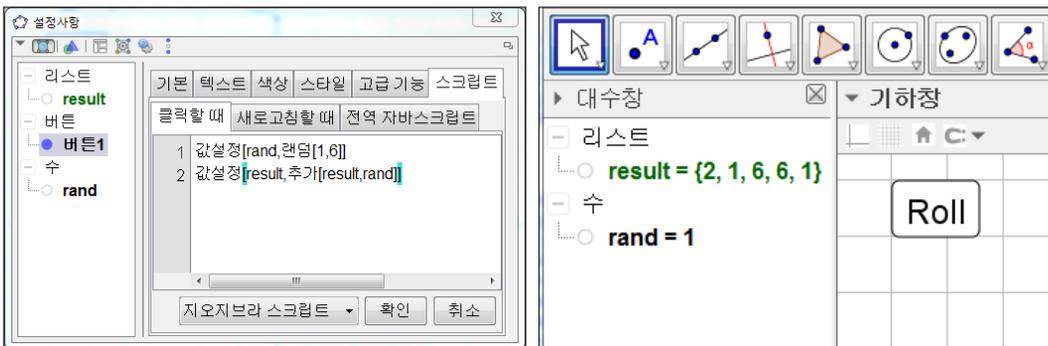
아래 왼쪽 그림과 같이 대수창에 result라는 이름의 리스트가 정의되었습니다. 그러나 결과를 result에 누적시키는 코딩은 아직 입력하지 않았기 때문에 Roll 버튼을 클릭해도 result는 변하지 않습니다.



이제, 버튼을 누를 때마다 result에 결과를 누적시켜주는 코드를 작성해 보겠습니다. 버튼에 포인터를 올려놓고 마우스 오른쪽 버튼을 클릭하여 설정사항으로 들어갑니다. 그러면 위의 오른쪽 그림과 같이 스크립트 설정사항이 나타납니다. 스크립트의 1번 줄에 이미 입력한 명령어가 있습니다. 엔터를 눌러 아래 왼쪽 그림과 같이 2번 줄에 다음 내용을 입력합니다.

```
값설정[result,추가[result,rand]]
```

- ※ 추가[<리스트>,<대상>] : 대상을 리스트의 오른쪽에 추가
- ※ 값설정[<대상1>,<대상2>] : 대상1의 값을 대상2의 값으로 대치



‘추가’ 명령에 의해 result 리스트의 오른쪽에 rand의 값이 추가가 되고, 이렇게 만들어진 새로운 리스트는 ‘값설정’ 명령에 의해 기존 result 리스트의 새로운 값이 됩니다. 수학적으로 함수의 인수 부분에 함수가 들어가 있는 합성함수의 형태입니다. X를 클릭하여 창을 닫으면 자동으로 저장이 됩니다. 이제 Roll 버튼을 클릭해 보면 코딩한 바와 같이 버튼을 클릭할 때마다 나오는 rand의 값이 result 리스트에 누적이 되는 것을 확인 할 수 있습니다.

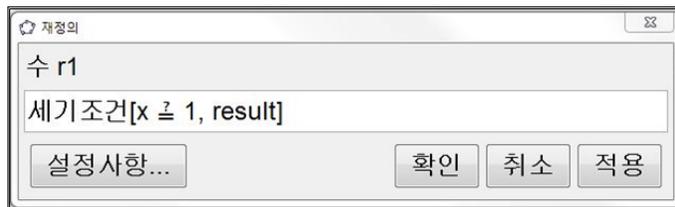
1.1.3 상대도수 구하기

각 눈의 상대도수를 구하기 위해서는 각 눈의 빈도수를 먼저 알아야 합니다. ‘세기조건’이란 명령어를 활용하면 이것이 가능합니다. 조건에 맞는 대상의 수를 세는 것으로 Excel을 다루는 사용자라면 ‘countif’ 함수에 해당한다고 생각하면 됩니다. 입력창에 다음 내용을 입력합니다.

```
r1=세기조건[x==1,result]
```

※ 세기조건[<조건>,<리스트>] : 리스트에서 조건에 맞는 원소의 개수

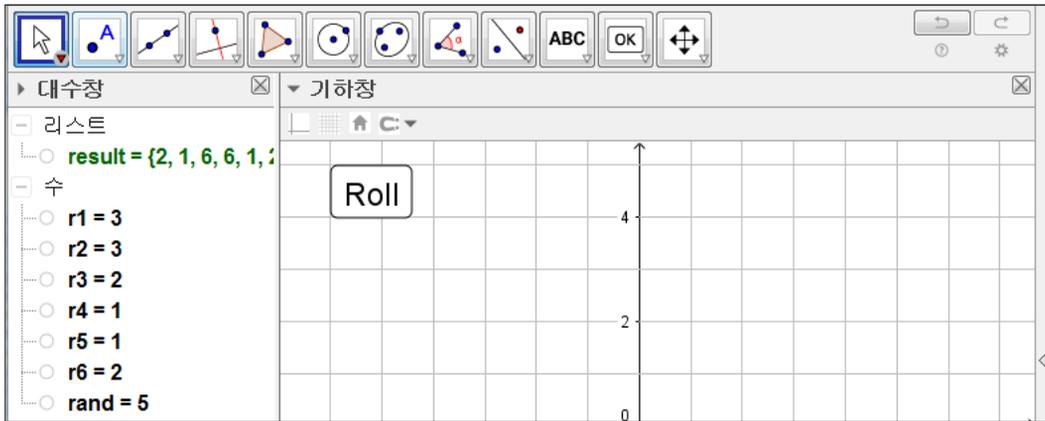
먼저 세기조건의 첫 번째 인수를 살펴보도록 하겠습니다. 등호가 2개 연달아 사용되었는데, 등호가 1개면 대입, 등호가 2개면 판단의 의미입니다. 즉, ‘x=1’은 x에 1을 넣는 것이고, ‘x==1’은 x의 값이 1인지 아닌지를 판단하는 것입니다. 따라서 위 명령어로 두 번째 인수인 result의 각 원소에 대해서 조건 ‘x==1’이 참인 것의 개수를 세고, 그 수를 r1에 대입하게 됩니다.



참고로 연산자 ‘==’를 입력한 후 재정의 창을 열면 위의 그림과 같이 등호 위에 물음표가 그려진 형태로 표시가 됩니다. 이는 두 값이 같은지 물어보는 의미로 해석할 수 있겠습니다. 이어서 result 리스트에서 2의 개수를 세기 위해 입력창에 다음과 같이 입력합니다.

```
r2=세기조건[x==2,result]
```

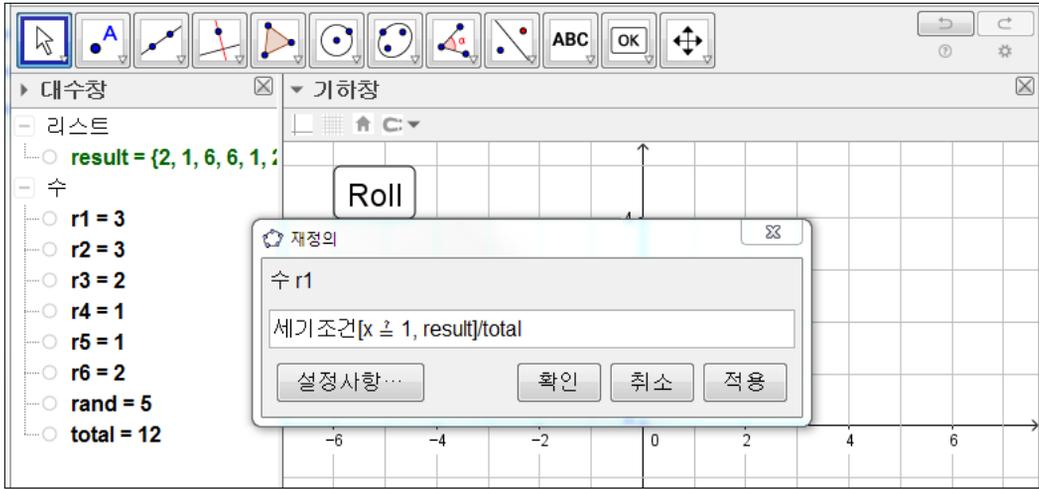
위와 같은 방법으로 r3, r4, r5, r6도 만들어 봅니다.



상대도수는 각 눈의 빈도수를 총 시행횟수로 나누면 됩니다. 그러면 총 시행횟수는 어떻게 구해야 할까요? 아마도 여러 가지 방법이 있을 것입니다. 다음을 입력창에 입력해 봅니다.

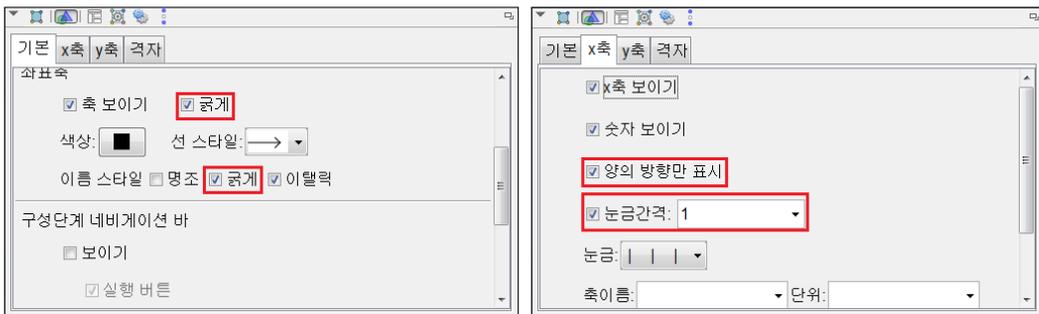
```
total=세기조건[x>0,result]
```

마지막으로 빈도수를 총 시행횟수로 나누어 줌으로써 상대도수를 나타내 보도록 하겠습니다. 대수창에서 r1을 더블 클릭하면 r1을 재정의 할 수 있는 창이 나옵니다. 이때, 빈도수를 나타내는 수식을 total 변수로 나누어 주면 상대도수가 계산됩니다.



1.1.4 막대그래프 표현하기

막대그래프를 그리기 전에 좌표축의 모양을 설정하겠습니다. 기하창에 마우스 포인터를 놓고 오른쪽 버튼을 클릭하여 기하창의 설정사항으로 들어갑니다. 아래 왼쪽 그림과 같이 기본 탭의 좌표축 항목에서 축과 이름을 굵게 설정합니다. 그리고 x 축, y 축 탭에서 눈금간격은 1 그리고 양의 방향만 나타나게 설정합니다.



이제 x 축과 y 축을 각각 적당히 확대하여 필요한 부분만 화면에 나타나도록 하겠습니다. 도구모음의 가장 오른쪽에 있는 ‘기하창 이동’ 도구를 선택합니다.

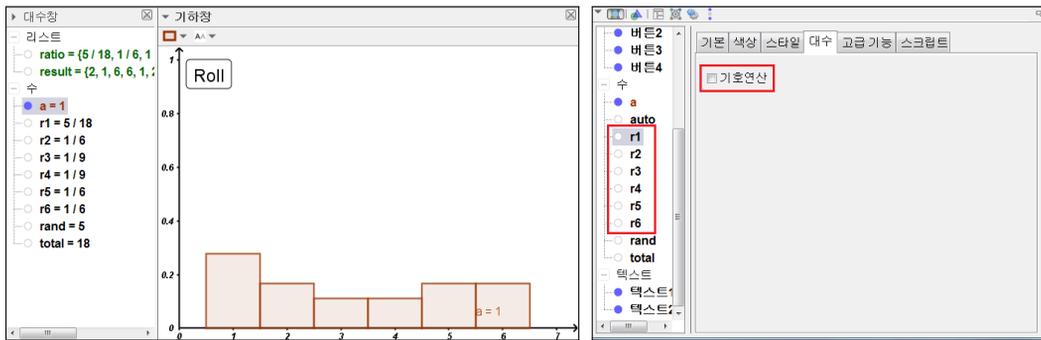
마우스의 포인터를 y 축 위에 올려놓으면 위아래 양방향 화살표로 포인터의 모양이 바뀌는 것을 볼 수 있습니다. 이때, 마우스 왼쪽 버튼을 클릭한 채로 위로 올려 보면 y 축이 확대됩니다. y 축은 상대도수를 나타내는 축으로 0부터 1까지의 값만 필요합니다. 따라서 눈금 1이 기하창의 상단에 위치할 때까지 확대해 줍니다. x 축은 막대그래프가 놓이는 부분으로 눈금 7이 가장 오른쪽에 놓이도록 확대해 줍니다. 이제 상대도수를 막대그래프로 나타내 보겠습니다. 막대그래프를 그리기 위해서는 막대의 높이에 대한 리스트가 필요합니다. 입력창에 다음 내용을 입력하여 높이 리스트를 생성합니다.

```
ratio={r1,r2,r3,r4,r5,r6}
```

이제 막대그래프를 그려 보겠습니다. 다음 내용을 입력창에 입력합니다.

```
막대그래프[0.5,6.5,ratio]
```

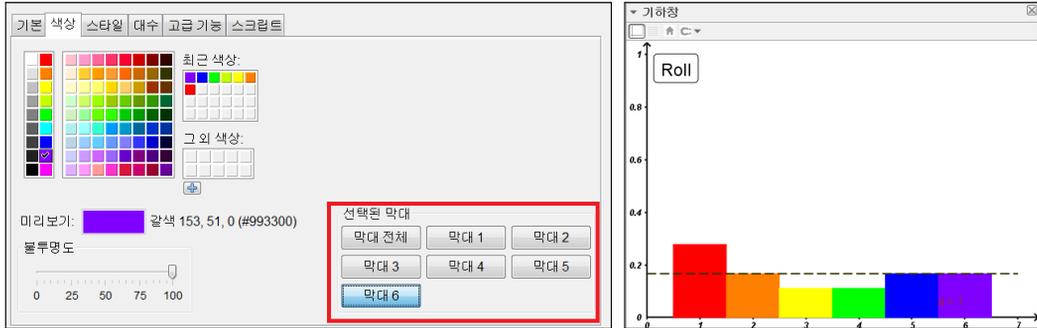
※ 막대그래프[<시작값>,<끝값>,<높이의 리스트>]



위의 왼쪽 그림과 같이 대수창의 $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6$ 의 값이 분수로 표시가 되어 있는데, 각 수의 설정사항의 대수 탭에서 기호연산을 해제하여 소수표현으로 바꾸어 줍니다. 이제 만들어 놓은 Roll 버튼을 클릭해 봅니다. 막대그래프의 높이가 조금씩 달라지는 것을 볼 수 있습니다. 시각적인 효과를 높이기

제 1 장 GEOGEBRA를 활용한 통계

위해 막대들의 색상도 다르게 지정해 보겠습니다. 막대 위에 마우스 포인터를 올려놓고 오른쪽 버튼을 클릭하여 설정사항으로 들어갑니다. 설정사항에서 막대를 개별적으로 선택하여 색상을 변경해 줍니다.



또, 위의 오른쪽 그림과 같이 막대들의 높이가 어느 곳으로 수렴해 가는지를 알기 쉽게 나타내기 위해 직선 $y = 1/6$ 을 그려줍니다. 그리고 직선의 설정사항에서 이를 점선으로 변경합니다.

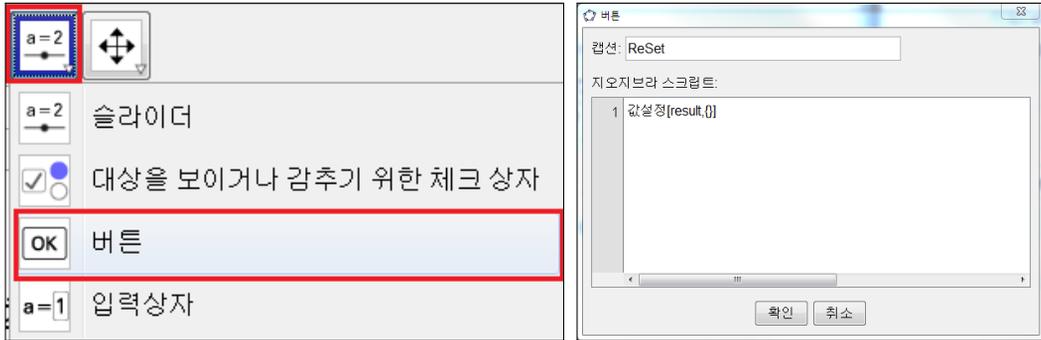
곡선[t,1/6,t,0,7]

※ 곡선[<식>,<식>,<매개변수>,<처음값>,<마지막값>]

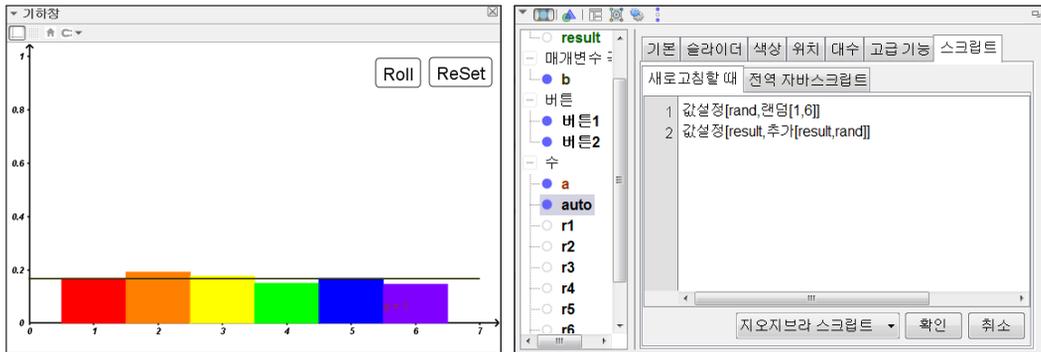
1.1.5 초기화 버튼과 자동화 버튼 만들기

실험을 처음부터 다시 시작하고자 할 때, 이미 실행한 결과를 초기화할 수 있는 버튼이 필요합니다. 그리고 주사위를 던지는 시행을 매우 많이 해야 하므로 던지는 시행을 자동화할 수 있는 버튼도 필요합니다. 이번 절에서는 이 버튼들을 만드는 과정을 소개합니다. 먼저 초기화 버튼을 만들어 보겠습니다. 위의 도구 목록에서 버튼 도구를 선택합니다. 그리고 버튼의 설정사항에서 캡션에 'Reset'이라 작성합니다. 초기화는 result 리스트를 비우면 되는 것이므로 버튼의 스크립트는 다음과 같이 작성합니다.

값설정[result, {}]



만들어진 버튼은 마우스의 오른쪽 버튼을 클릭한 채로 움직여 주면 원하는 위치에 배치할 수 있습니다.



다음으로 자동으로 주사위를 던져주는 자동화 버튼을 만들어 보겠습니다. 우선 슬라이더를 만듭니다. 슬라이더의 이름은 'auto'로 정의합니다. 슬라이더의 설정사항에서 스크립트(새로 고침할 때)에 위의 오른쪽 그림과 같이 다음 내용을 입력합니다.

값설정[rand, 랜덤[1,6]]
 값설정[result, 추가[result,rand]]

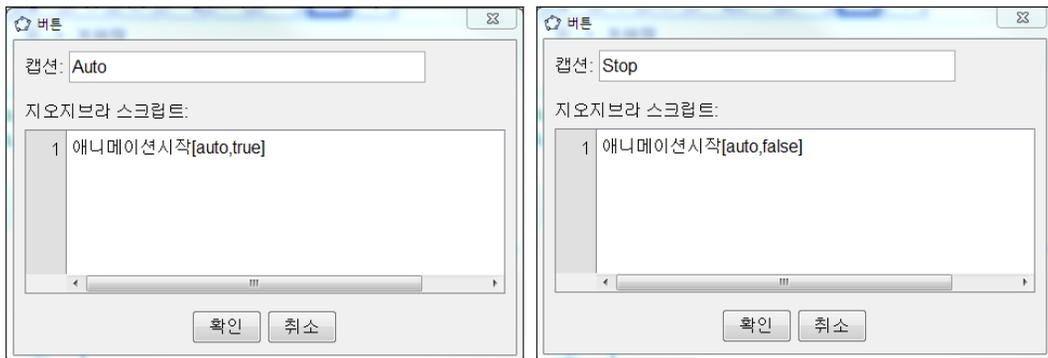
제 1 장 GEOGEBRA를 활용한 통계

이제 슬라이더를 좌우로 움직여 보면 total의 숫자가 올라감을 확인할 수 있습니다. 다음으로 ‘Auto’를 캡션으로 하는 버튼을 만들어 스크립트에 다음 내용을 입력합니다.

```
애니메이션시작[auto,true]
```

반대로 멈추는 버튼을 만들어 보겠습니다. ‘Stop’을 캡션으로 하는 버튼을 만들어 스크립트에 다음 내용을 입력합니다.

```
애니메이션시작[auto,false]
```



그리고 슬라이더는 보이지 않도록 설정해 줍니다.

1.1.6 자료의 제목과 상대도수 분포표 나타내기

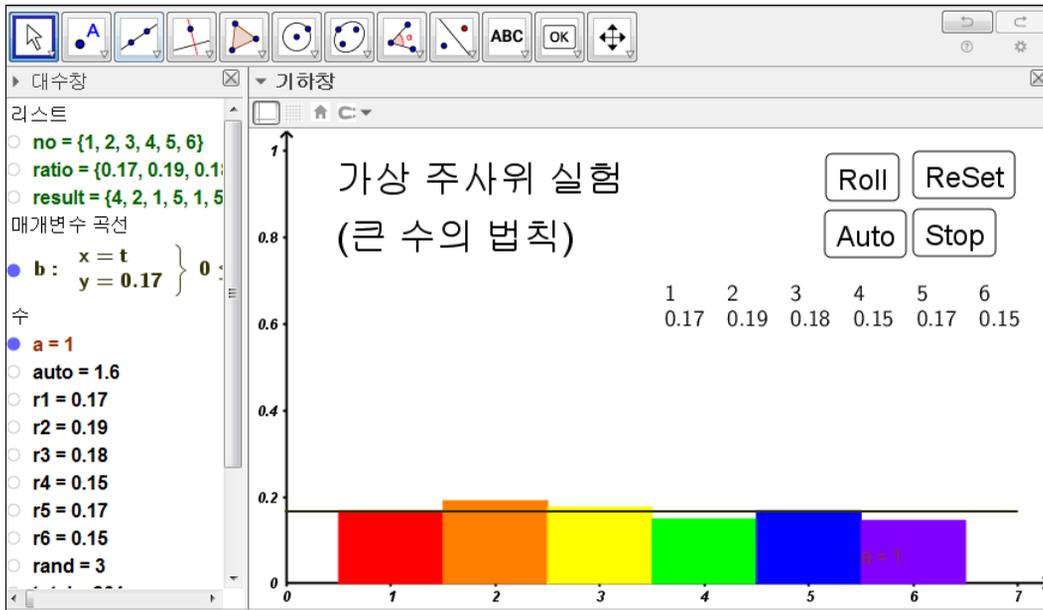
자료의 진행상황을 알 수 있게 하는 간단한 표를 만들어 보겠습니다. 먼저 입력창에 다음 내용을 입력하여 눈의 수로 이루어진 리스트를 생성합니다.

```
no={1,2,3,4,5,6}
```

그리고 다음 내용을 입력하여 눈의 수에 따른 상대도수를 나타내는 표를 생성합니다.

```
표[no,ratio]
※표[<리스트>,<리스트>]
```

버튼과 표를 적당한 위치에 배치하고 ‘텍스트’ 도구를 이용하여 제목을 적으면 아래 그림과 같은 완성된 자료를 얻을 수 있습니다.



이번 장에서는 가상 주사위를 통해 큰 수의 법칙을 실험해 볼 수 있는 자료를 만들어 보았습니다. 이 과정에서 임의의 수를 추출하는 방법과 관찰의 결과를 누적시키는 방법 그리고 수집된 자료에서 특정한 자료를 세는 방법 등 통계 실험에서 요구되는 기본적인 내용들을 학습하였습니다. 다음 장부터는 이번 장의 내용을 기본 바탕으로 통계에서 실험할 수 있는 다양한 자료를 만들어 보도록 하겠습니다.

찾아보기

값설정, 7

랜덤, 3

리스트, 6

막대그래프, 11

세기조건, 8

추가, 7

큰 수의 법칙, 3

표, 15

그동안 했던 강의 자료 중 일부를 책으로 엮음.

<http://min7014.iptime.org/math/2017063002.htm>



수학교사와 학생을 위한
Geogebra와 수학의 시각화

한국교원대학교 융합교육연구소 추천 도서

수 학교 사 와 학 생 을 위 한

Geogebra 와 수학의 시각화

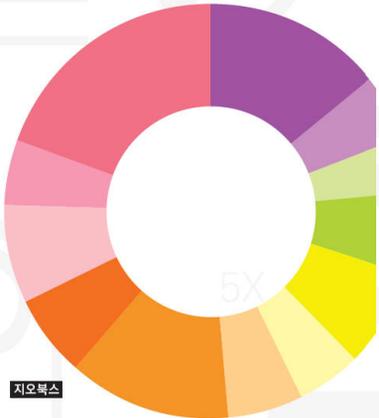
저자 민은기 | 이경수

저자 민은기

강원대학교 사범대학 수학교육과를 졸업하고 POSTECH 수학과에서 석사학위를 받았습니다. 경선중학교, 문막중학교, 강원과학고등학교, 세종과학예술경영학교에서 근무하였고 현재는 김해 삼정중학교에서 학생들을 지도하고 있습니다. 중학교, 과학고, 영재학교에서 학생들을 지도한 경험을 바탕으로 일급교사자격연수 및 영재인 등에서 수학자료 만들기에 대한 강의를 해왔습니다.

- 2017년 경남과학고등학교 수학과 현장연구 특강
- 2017년 세종청의과학캠프(수학)특강
- 2016년 강원도 중등 수학과 좋은 수업 만들기 직무연수 출강
- 2013년~2016년 강원도 중등수학자! 급진교사 자격연수 출강
- 2014년~2015년 YSC 강원도청소년과학캠프 창의력 문제 출제 및 심사

Geogebra를
활용한 수업자료 제작과
수학문제 탐구활동



저자 이경수

강원대학교 사범대학 수학교육과를 졸업한 후 학교현장에서 즐거운 수학교육을 만들고자 노력하고 있습니다. 프로그래밍에 흥미가 있어 Geogebra, SageMath 등의 소프트웨어로 수업자료를 만드는 활동을 즐겨하고 있으며 이를 수업에 효율적으로 적용할 수 있는 방법을 고민하고 있습니다. 특히, 통계관련 시뮬레이션 자료를 제작하는 활동에 관심이 많습니다.

- 2017년 현재 원주여자고등학교 재직 중
- 2015년~2017년 단원학교 맞춤형 직무연수 출강
- 2016년 교육부 중등교육연수원 [융합과 미래] 콘텐츠 개발
- 2016년 강원도 중등 수학과 좋은 수업 만들기 직무연수 출강
- 2013년~2016년 강원도 중등수학자! 급진교사 자격연수 출강
- 2015년~2016년 YSC 강원도청소년과학캠프 창의력 문제 출제 및 심사

지오박스



지오박스

지오박스

T 02-2263-6414 F 02-2268-9481
www.emotionbooks.co.kr





<https://ggbm.at/gsARCQs5>

책자료실(지오지브라 튜브)

[참고]

[민은기 선생님의 수학자료실]

Homepage : <http://min7014.iptime.org>

Facebook Page : <https://www.facebook.com/mineungimath>

YouTube Channel : <https://goo.gl/JpzU5i>

[이경수 선생님 블로그]

<http://blog.naver.com/evening07>

[GeoGebra 5.0.363.0-3D (03 June 2017) 설치파일]

Installer : <https://goo.gl/YvjsCV> (From Home Page)

Installer : <https://goo.gl/n69yE1> (From Google Drive)

[GeoGebra 5.0.462.0-d (02 May 2018) 설치파일]

Installer : <https://goo.gl/SsdFBd> (From Home Page)

Portable : <https://goo.gl/FxJxES>(From Home Page)

Installer : <https://goo.gl/dqtbfk> (From Google Drive)

Portable : <https://goo.gl/zwundc>(From Google Drive)