
마지막 변경일 2021년 12월 28일

** 탄젠트함수 **

Geogebra와 수학의 시각화 책의 2.3소절 내용임.

<https://colab.research.google.com/github/min7014/2021/blob/main/2021042602.ipynb>

가장 최근 파일은 링크를 누르면 받아 보실 수 있습니다.

<https://min7014.github.io/2021/2021042606.pdf>

자료의 수정이 필요한 부분이 있으면 언제든지

민은기 E-mail : min7014@nate.com

이경수 E-mail : ksteach81@gmail.com

으로 연락주시면 감사하겠습니다.

강의록을 보기전에 프로그램 설치를 반드시 읽어보시고 꼭 지오지브라 클래식 5를 설치하시기 바랍니다.

<https://min7014.github.io/2021/2021042603.pdf>

* 주요변경내역 *

2017.06.24 Geogebra와 수학의 시각화 책에 엮어 출간.

2021.12.28 중간에 나오는 반지름이 이라는 단어를 반지름이 로 오타자 수정.

2021.12.28 깃허브 페이지(<https://min7014.github.io>)로 변경

차 례

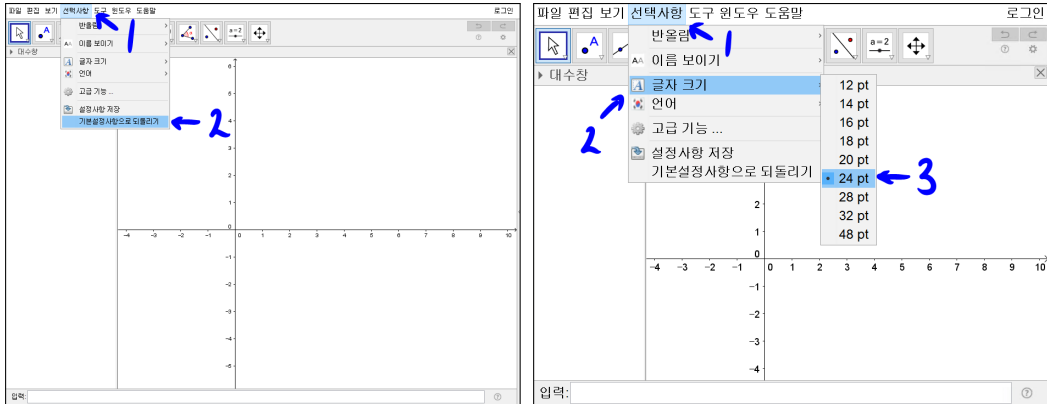
| | |
|----------------------------|---|
| 차 례 | i |
| 제 1 장 Geogebra를 활용한 기하와 함수 | 1 |
| 1.1 탄젠트함수 | 3 |

제 1 장

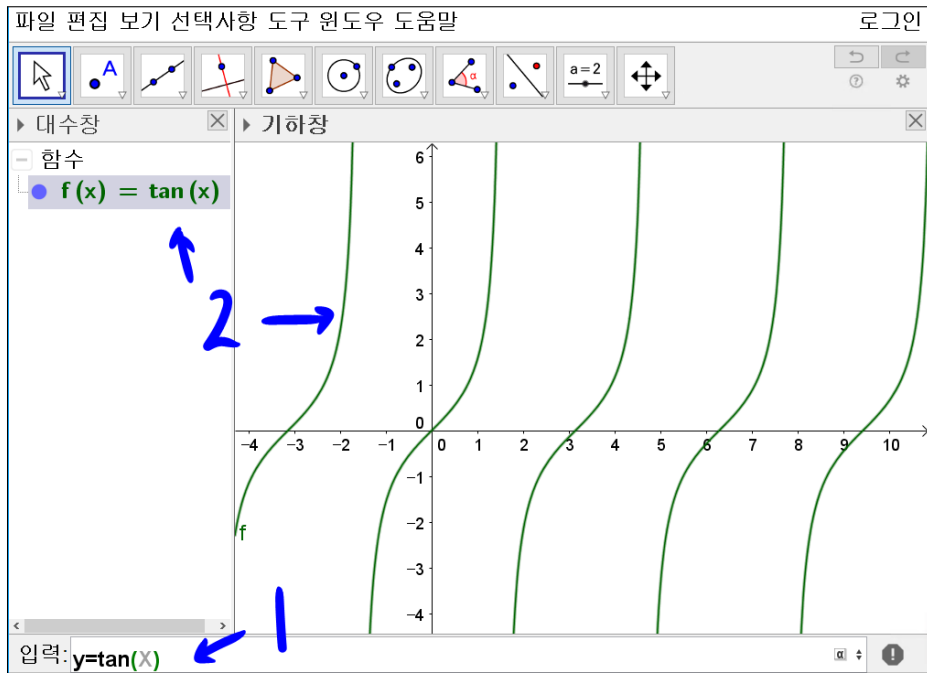
Geogebra를 활용한 기하와 함수

1.1 탄젠트함수

고등학교 과정에서 나오는 탄젠트함수를 Geogebra를 사용하여 만들어 보겠습니다.

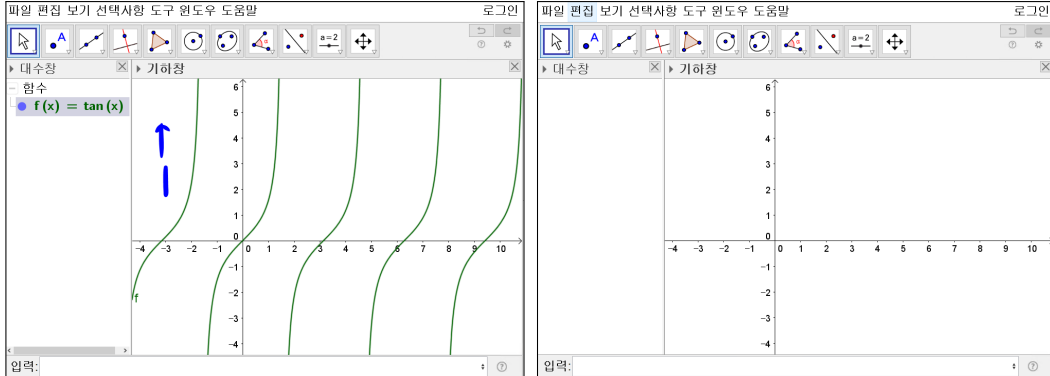


처음 시작환경을 같게 하기 위해서 선택사항에서 기본설정사항으로 되돌리기를 선택합니다. 선택사항에서 글자 크기를 24pt로 선택합니다.

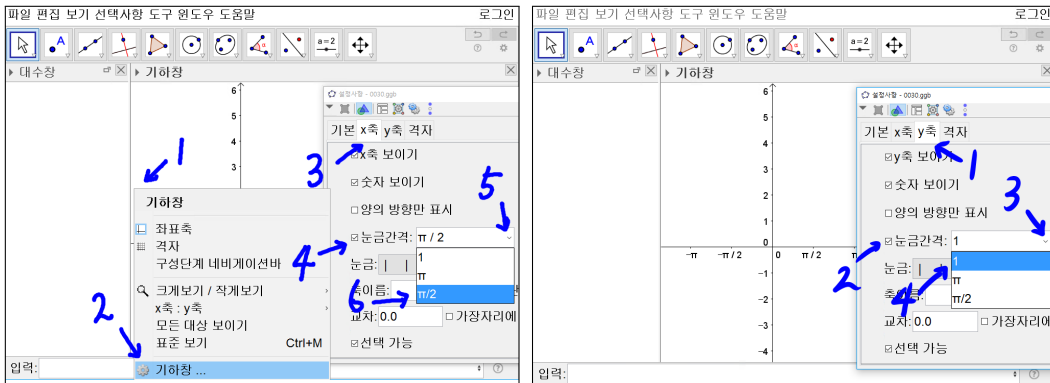


제 1 장 GEOGEBRA를 활용한 기하와 함수

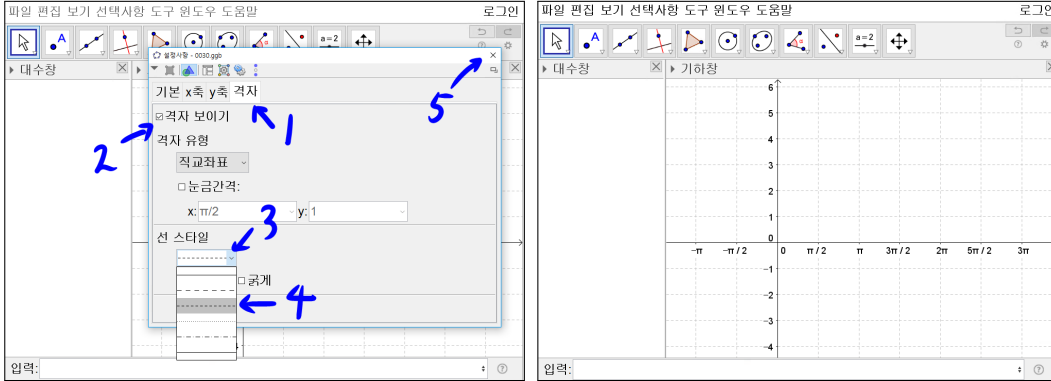
탄젠트함수를 그리는 가장 간단한 방법은 입력창에 $y = \tan(x)$ 를 입력하는 것입니다. 그러나 이는 완성된 \tan 함수를 나타낸 것일 뿐입니다. 지도용으로 사용할 자료는 삼각함수의 정의에 따라 함수가 그려지는 과정이 보이도록 제작해야 합니다.



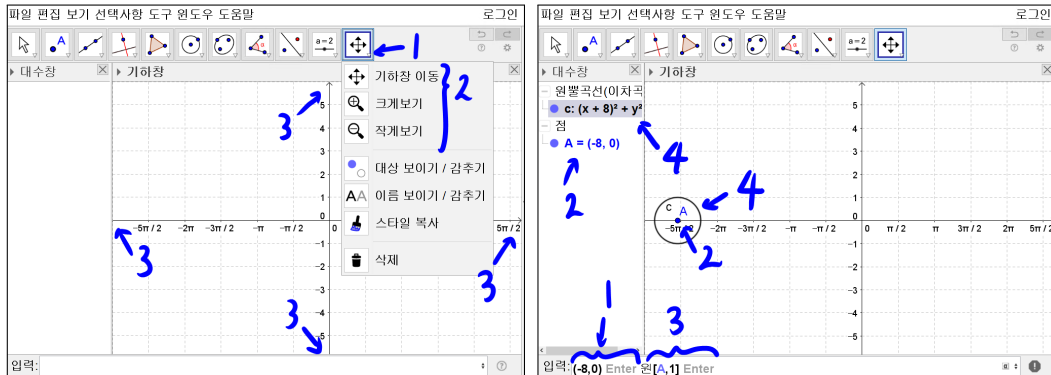
기하창을 선택하고 [Ctrl]를 누른 상태에서 [A]를 누르면 모든 대상이 선택됩니다. [Delete]를 눌러 삭제합니다.



x 축의 단위 눈금을 $\frac{\pi}{2}$ 로 설정하겠습니다. 기하창에서 마우스 오른쪽 버튼을 클릭하여 기하창 설정으로 들어갑니다. x 축 탭에서 눈금간격의 체크상자를 선택합니다. 눈금간격의 리스트 박스에서 $\frac{\pi}{2}$ 에 해당하는 눈금 $\pi/2$ 를 선택합니다. y 축 탭에서 눈금간격의 체크상자를 선택합니다. 눈금간격의 리스트 박스에서 1에 해당하는 눈금을 선택합니다.

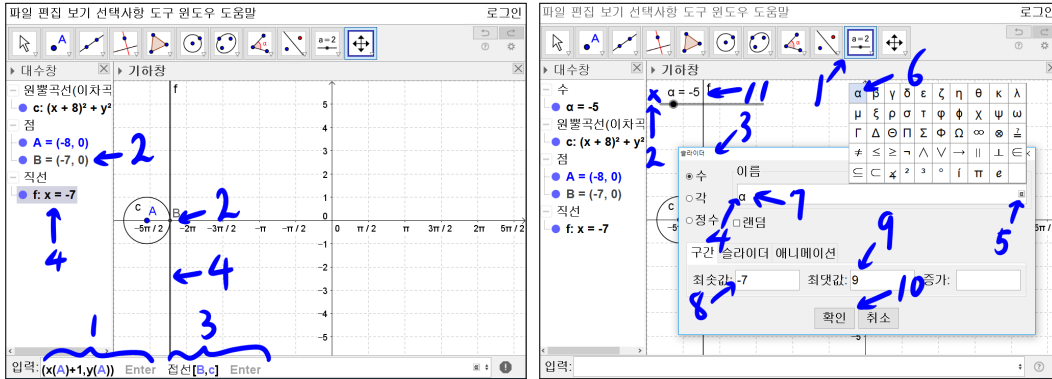


격자 탭에서 격자 보이기를 체크하고 선 스타일의 리스트 박스에서 두 번째 점 선을 선택합니다. 설정사항 창을 닫으면 기하창에 x 축의 단위눈금이 $\frac{\pi}{2}$ 이고 y 축의 단위눈금이 1인 격자 좌표평면이 나타납니다. \tan 함수를 그리기 위한 좌표평면 설정을 완료했습니다.

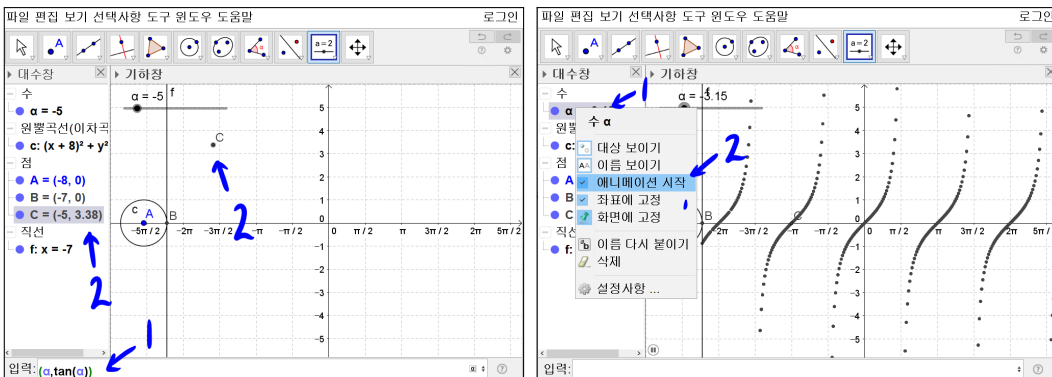


기하창 이동, 크게보기, 작게보기를 사용하여 x 축, y 축의 최대 최소 눈금을 그림과 같이 맞추어줍니다. 입력창에 $(-8,0)$ 을 입력합니다. 대수창에 $A = (-8,0)$ 이 나타나고 기하창에 점 A가 있습니다. 입력창에 원[A,1]을 입력합니다. 대수창에 $c: (x + 8)^2 + y^2 = 1$ 이 나타나고 기하창에 원 c가 그려졌습니다. 이때, 원[A,1]은 중심이 점 A이고, 반지름이 1인 원을 그리는 명령어입니다.

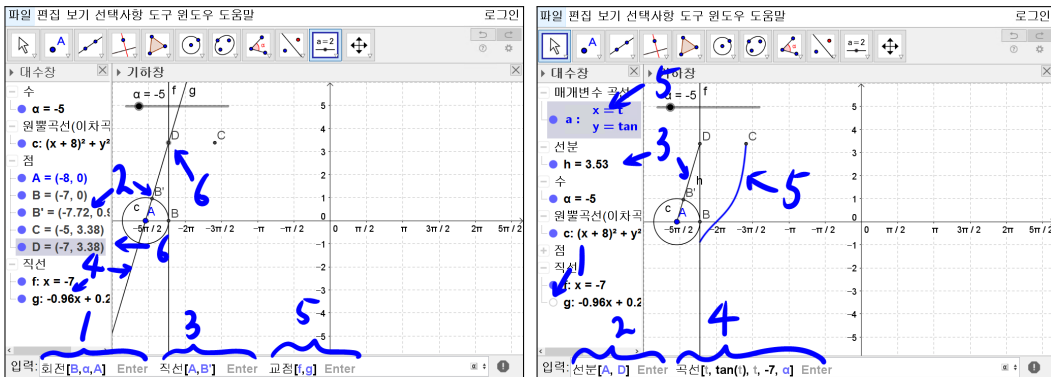
제 1 장 GEOGEBRA를 활용한 기하와 함수



입력창에 $(x(A) + 1, y(A))$ 를 입력합니다. 대수창에 $B = (-7, 0)$ 이 나타나고 기하창에 점 B 가 나타납니다. $(x(A) + 1, y(A))$ 의 뜻은 점 A 의 x 좌표에 1을 더한 것을 x 좌표로 하고 점 A 의 y 좌표를 y 좌표로 하는 점을 의미합니다. 입력창에 점선[B,c]를 입력합니다. 대수창에 $f: x = -7$ 이 나타나고 원 c 의 점선 a 가 그려졌습니다. 점선[B,c]은 점 B 를 지나고 c 에 접하는 점선을 만들라는 의미입니다. ‘슬라이더’ 도구를 선택합니다. ‘x’표시 위치를 선택하고 수를 선택하고 이름 빈칸을 선택한 후 α 모양을 선택하면 문자 입력이 나오는데 여기서 α 를 선택하면 이름창에 α 가 쓰여집니다. 최솟값은 -7 , 최댓값 9 를 입력하고 확인을 선택합니다. 슬라이더 α 가 만들어집니다. 슬라이더 α 를 선택하여 방향키나 마우스를 끌어서 $\alpha = -5$ 로 기본 세팅해 놓습니다.



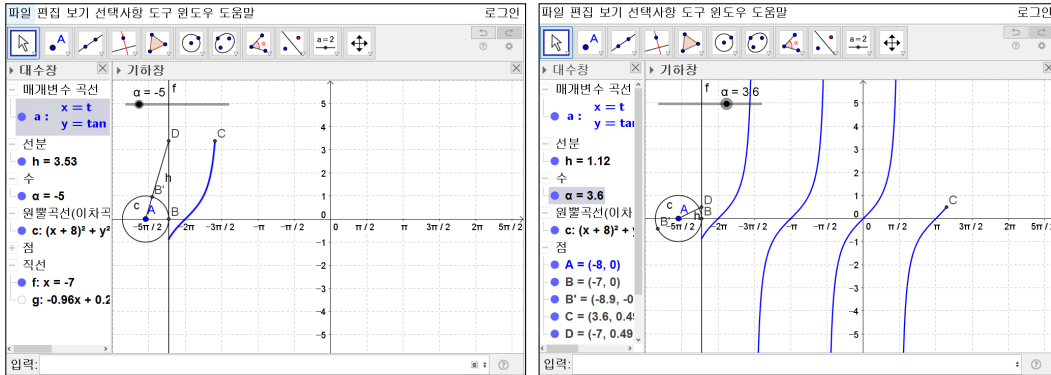
입력창에 $(\alpha, \tan(\alpha))$ 를 입력합니다. 대수창에 $C = (-5, 3.38)$ 이 나타나고 기하창에 점 C가 찍혀집니다. 동적기하를 보여드리겠습니다. 점 C에 오른쪽 마우스 클릭하고 자취보이기를 선택합니다. 슬라이더 α 에 마우스 오른쪽 버튼을 클릭하고 애니메이션 시작을 선택합니다. 탄젠트 함수가 그려지는 것이 보입니다. 자취보이기와 슬라이더를 활용한 동적기하를 보여주는 좋은 예입니다. 원상복구 시켜보겠습니다. 슬라이더 α 에 마우스 오른쪽 버튼을 클릭하여 애니메이션 시작을 선택하면 움직임이 멈춥니다. 참고로 기하창의 움직이는 대상을 선택하기 어려우므로 대수창에서 대상을 선택하는 것이 좋습니다. 슬라이더를 $\alpha = -5$ 로 다시 설정해놓습니다. [Ctrl]를 누른 상태에서 [F]를 누르면 자취가 사라집니다. 또는 이런 어려운 과정 없이 단순히 [Ctrl]를 누른 상태에서 [Z]를 누르면 전 단계로 가게 됩니다.



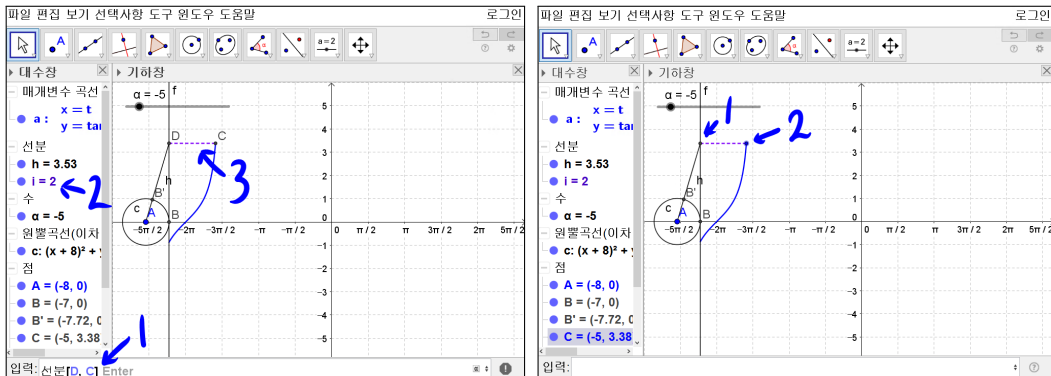
입력창에 회전[B, α , A] 입력합니다. 대수창에 $B' = (-7.72, 0.96)$ 이 나타나고 기하창에 점 B' 가 찍혀집니다. 입력창에 직선[A, B']를 입력합니다. 대수창에 $g: -0.96x + 0.28y = 7.67$ 이 나타나고 기하창에 직선 g 가 나타납니다. 입력창에 교점[f, g]를 입력합니다. 대수창에 $D = (-7, 3.38)$ 이 나타나고 기하창에 교점 D 가 나타납니다. 대수창에서 직선 g 앞의 동그라미를 선택해주면 직선 g 가 사라집니다. 입력창에 선분[A, D]를 입력합니다. 대수창에 $d = 3.53$ 이 나타나고 기하창에 선분 d 가 나타납니다. 선분[A, D]는 점 A, 점 D를 연결하는 선분을 만들라는 명령어입니다. 다시 입력창에 조금 긴 명령어를 넣겠습니다.

제 1 장 GEOGEBRA를 활용한 기하와 함수

곡선 $[t, \tan(t), t, -7, \alpha]$ 를 입력합니다. 대수창에 매개변수 곡선 e가 나타납니다. 곡선 $[t, \tan(t), t, -7, \alpha]$ 은 x 좌표를 t 로 하고 y 좌표를 $\tan(t)$ 로 하고 t 가 -7 에서 α 까지의 범위에서 매개변수 곡선을 그리라는 명령어입니다. 대수창에서 매개변수 곡선 a에 마우스 오른쪽 버튼을 클릭하여 설정사항을 선택합니다. 기본에서 이름보이기 체크상자를 체크해제 합니다. 색상에서 파란색을 선택합니다. 스타일에서 선 굵기를 5로 설정합니다.

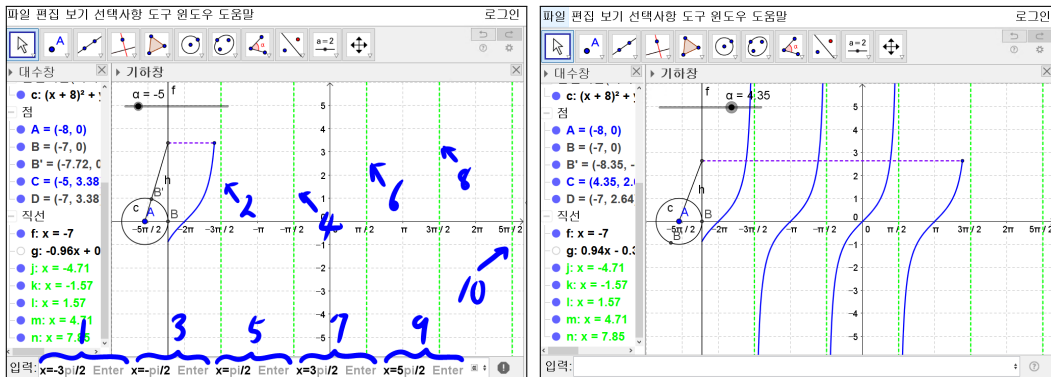


슬라이더 α 를 움직이면 값에 따라 \tan 그래프가 그려집니다. \tan 함수가 그려지는 과정을 보고 있습니다. 다시 슬라이더 α 를 -5 로 설정해 놓습니다.



지금부터는 탄젠트 함수의 점근선과 보조선들을 그려보도록 하겠습니다. 입력창에 선분[D, C] 입력합니다. 대수창에 $i = 2$ 이 나타나고 기하창에 선분 i 가 나

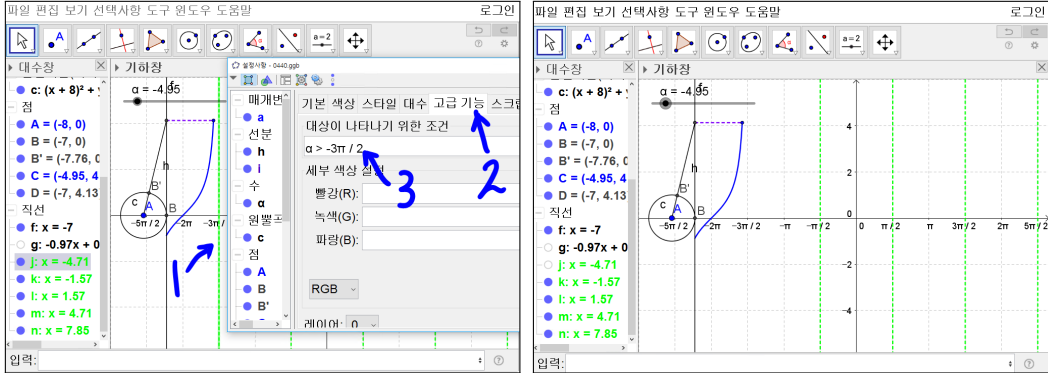
타합니다. 선분 i의 설정사항으로 들어가서 기본 탭에서 이름 보이기를 체크해 제하고 색상 탭에서 보라색을 선택하고 스타일 탭에서 선 굵기를 5로 하고 선 스타일의 리스트 박스에서 두 번째 점선을 선택합니다. 점 D는 이름이 보이지 않는 점으로 합니다. 점 C는 이름이 보이지 않는 파란색의 크기가 5인 점으로 합니다.



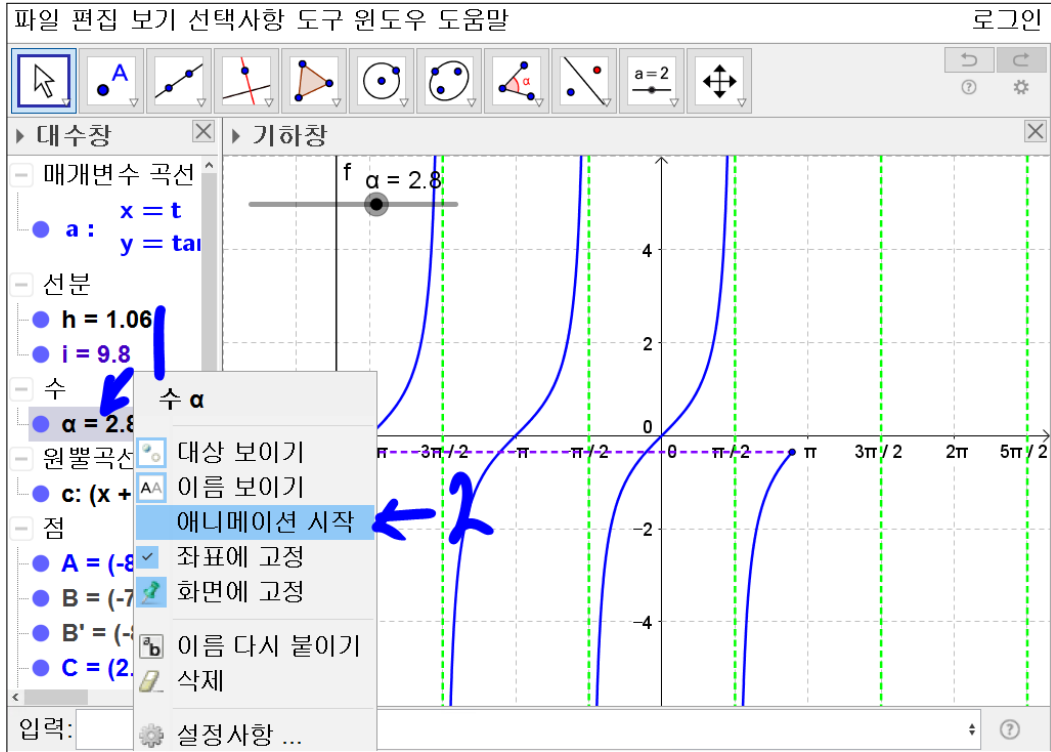
입력창에 $x = -3\pi/2$, $x = -\pi/2$, $x = \pi/2$, $x = 3\pi/2$, $x = 5\pi/2$ 라고 차례로 입력하면 점근선이 만들어집니다. 점근선을 모두 이름이 보이지 않는 녹색의 굵기가 5인 점선으로 바꿉니다. 슬라이더 a 에 애니메이션 시작을 체크하면 자연스럽게 탄젠트 함수의 그래프가 그려지는 것을 볼 수 있습니다. 기하창 왼쪽 아래에 애니메이션 멈춤 버튼을 클릭합니다.

지금부터는 탄젠트 그래프가 각 점근선의 위치를 통과하는 순간에 점근선이 나타나도록 설정을 하겠습니다.

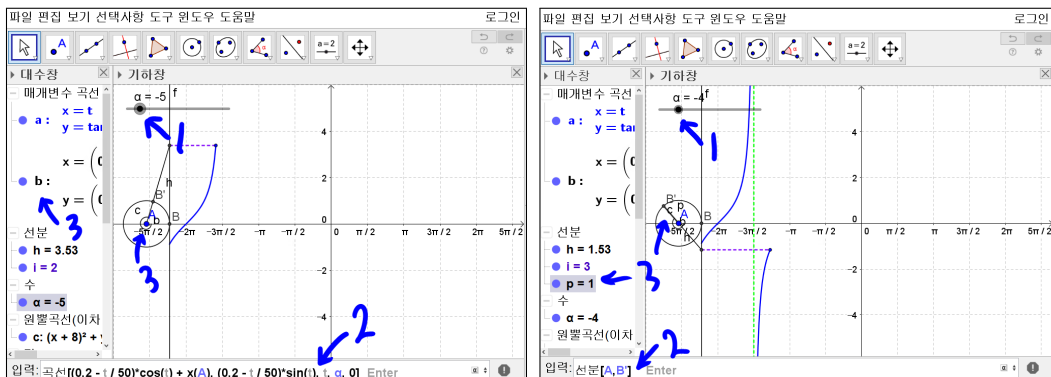
제 1 장 GEOGEBRA를 활용한 기하와 함수



$x = -\frac{3\pi}{2}$ 에 마우스 오른쪽 버튼을 클릭하여 설정으로 들어갑니다. 고급기능 탭에서 대상이 나타나기 위한 조건에 $\alpha > -3\pi/2$ 를 입력합니다. α 나 π 는 앞에서 특수문자 α 를 입력했던 것과 같은 방식으로 $\boxed{\alpha}$ 표시를 선택하여 입력하면 됩니다. 자 한번 시험해 봅시다. 슬라이더 α 의 값을 움직여 $\alpha = -5$ 로 만들어 봅시다. $x = -\frac{3\pi}{2}$ 이 사라졌을 것입니다. 다시 슬라이더 α 의 값을 움직여 $\alpha = -4.5$ 로 만들어 봅시다. 탄젠트 함수가 $x = -\frac{3\pi}{2}$ 를 통과하는 순간 점근선이 그려짐을 볼 수 있습니다. 즉, 대상이 나타나기 위한 조건이 참일 때에만 대상이 나타나는 것입니다. 나머지 점근선 $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3\pi}{2}$, $x = \frac{5\pi}{2}$ 에 대해서도 설정사항에 들어가서 대상이 나타나기 위한 조건에 각각 $\alpha > -\pi/2$, $\alpha > \pi/2$, $\alpha > 3\pi/2$, $\alpha > 5\pi/2$ 를 입력합니다.



슬라이더 α 에 애니메이션 켜기를 체크하면 그래프가 그려지는 부분이 점근선이 생기는 부분을 통과하는 순간 점근선이 아름답게 그려지는 것을 볼 수 있습니다.

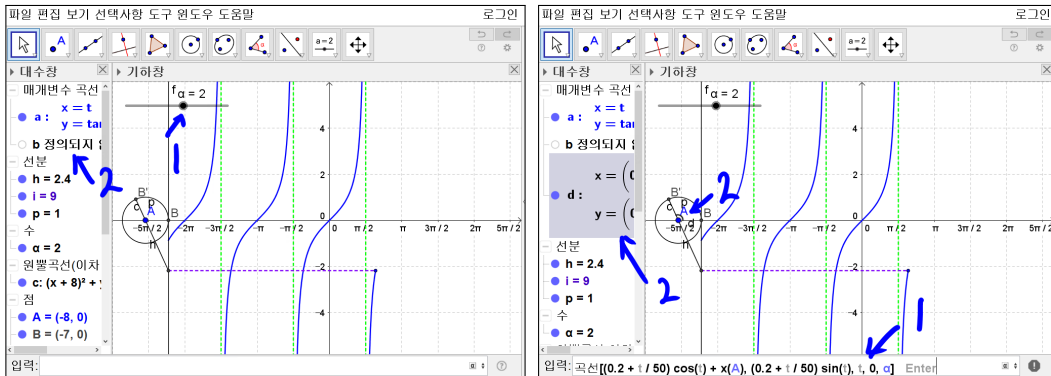


제 1 장 GEOGEBRA를 활용한 기하와 함수

슬라이더 α 를 $\alpha = -5$ 로 설정합니다. 입력창에

$$\text{곡선}[(0.2 - t/50) * \cos(t) + x(A), (0.2 - t/50) * \sin(t), t, \alpha, 0]$$

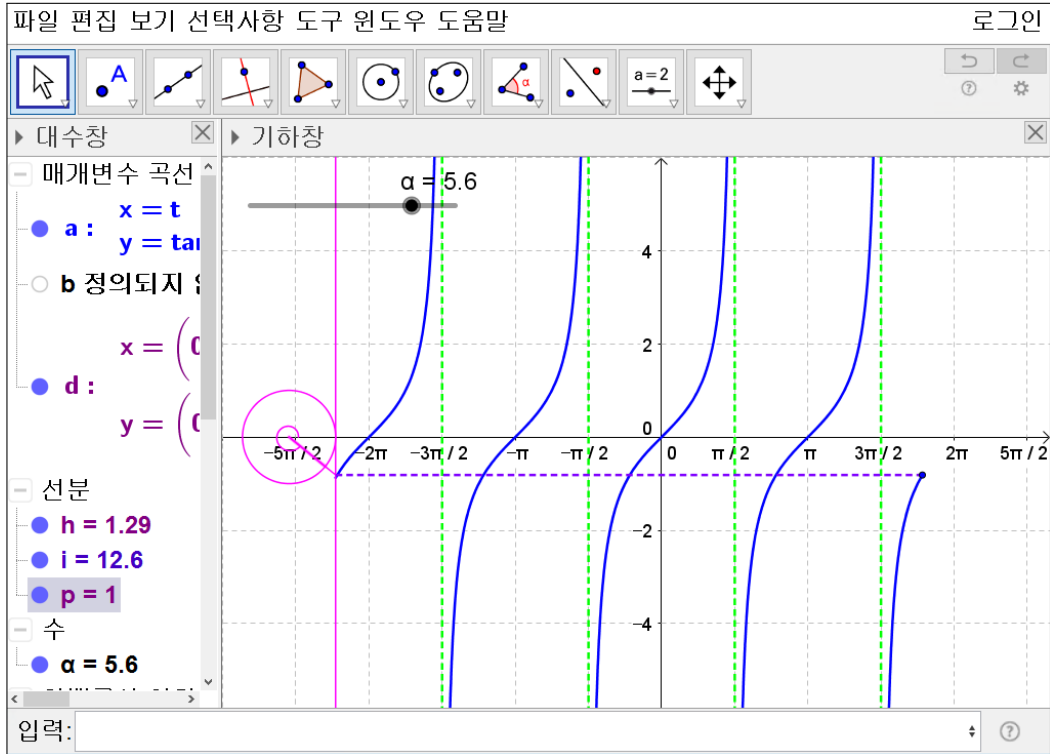
를 입력합니다. 점 A에 일반각의 크기를 나타내는 곡선이 생겼습니다. 슬라이더 α 를 $\alpha = -4$ 로 설정합니다. 선분[A, B]을 입력합니다. 일반각의 크기가 점 A의 주위에 곡선으로 표시가 된 모습을 볼 수 있습니다.



슬라이더 α 를 조절하여 $\alpha = 2$ 에 맞추면 ‘b정의되지 않음’이 뜹니다. 왜냐하면 곡선 명령어에서 4번째 인자가 최솟값, 5번째 인자가 최댓값을 나타내므로 α 가 0보다 작을 때에만 곡선이 그려지기 때문입니다. 양의 각에 대한 곡선에 대한 부분을 추가로 그려야 하겠습니다. 위와 같은 함수를 사용하여 입력창에

$$\text{곡선}[(0.2 + t/50) * \cos(t) + x(A), (0.2 + t/50) * \sin(t), t, 0, \alpha]$$

을 입력합니다. 기하창에 곡선으로 양의 각이 표현된 것이 보입니다.




이제 각각의 대상의 설정에서 기본, 색상, 스타일을 바꾸면서 꾸며서 완성하면 됩니다. 이렇게 만든 다음 슬라이더 α 에 애니메이션 시작을 체크하면 탄젠트 함수의 정의에 따라 탄젠트 함수가 자연스럽게 그려지는 것을 확인 할 수 있습니다. 탄젠트 함수의 그래프를 그리면서 기하창에 각각의 도구를 활용하여 일일이 그리지 않고 명령어를 활용하여 그리는 것을 해 보았습니다. 직접 그리는 것과 명령어를 입력하는 것에는 장단점이 있습니다. 단점으로는 각각의 명령어를 외워야 한다는 부담이 있습니다. 하지만 명령어가 필요할 때 대상의 정의를 보면 명령어를 어떤 식으로 썼는지를 살펴볼 수 있습니다. 처음 볼 때 복잡해 보이겠지만, 시행착오를 거치다 보면 대상의 정의에 쓰여진 의미를 파악할 수 있습니다. 조금 복잡한 것을 할 때는 직접 도구를 활용하여 그리는 것보다 명령어를 직접 입력하면 여러 단계를 거치지 않고 간단히 처리할 수 있는 장점이 있습니다.

제 1 장 GEOGEBRA를 활용한 기하와 함수

그동안 했던 강의 자료 중 일부를 책으로 엮음.

<http://min7014.iptime.org/math/2017063002.htm>



수학교사와 학생을 위한 Geogebra와 수학의 시각화

한국고원대학교 융합교육연구소 추천 도서

수 학교 사 와 학 생 을 위 한

Geogebra 와 수학의 시각화

저자 민은기 | 이경수


Geogebra를 활용한 수업자료 제작과 수학문제 탐구활동

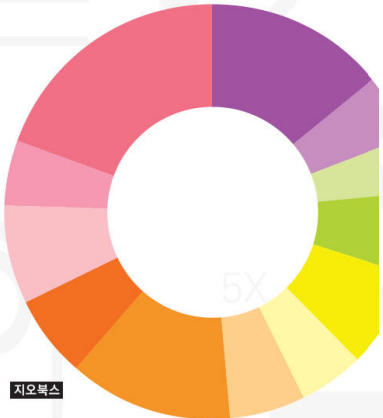
저자 민은기

강원대학교 사범대학 수학교육과를 졸업하고 POSTECH 수학과에서 석사학위를 받았습니다. 경선중학교, 문막중학교, 강원과학고등학교, 세종과학예술경영대학교에서 근무하였고 현재는 김해 삼정중학교에서 학생들을 지도하고 있습니다. 중학교, 과학고, 영재학교에서 학생들을 지도한 경험을 바탕으로 일급교사자격연수 및 영재인 등에서 수학자료 만들기에 대한 강의를 해왔습니다.

- 2017년 경남과학고등학교 수학과 현장연구 특강
- 2017년 세종창의과학캠프(수학)특강
- 2016년 강원도 중등 수학과 좋은 수업 만들기 직무연수 출강
- 2013년~2016년 강원도 중등수학과(급)경교사 자격연수 출강
- 2014년~2015년 YSC 강원도청소년과학캠프 창의력 문제 출제 및 심사


지오박스





지오박스

T 02-2263-6414 F 02-2268-9481
www.emotionbooks.co.kr





<https://ggbm.at/gsARCQs5>

책자료실(지오지브라 튜브)

[참고]

[민은기 선생님의 수학자료실]

Homepage : <http://min7014.iptime.org>

Facebook Page : <https://www.facebook.com/mineungimath>

YouTube Channel : <https://goo.gl/JpzU5i>

[이경수 선생님 블로그]

<http://blog.naver.com/evening07>

[GeoGebra 5.0.363.0-3D (03 June 2017) 설치파일]

Installer : <https://goo.gl/YvjsCV> (From Home Page)

Installer : <https://goo.gl/n69yE1> (From Google Drive)

[GeoGebra 5.0.462.0-d (02 May 2018) 설치파일]

Installer : <https://goo.gl/SsdFBd> (From Home Page)

Portable : <https://goo.gl/FxJxES>(From Home Page)

Installer : <https://goo.gl/dqtbfk> (From Google Drive)

Portable : <https://goo.gl/zwundc>(From Google Drive)