

---

마지막 변경일 2018년 5월 7일

## \*\* 제한된 범위에서 이차함수의 최대최소 \*\*

Geogebra와 수학의 시각화 책의 2.2소절 내용임.

<http://min7014.iptime.org/math/2017063002.htm>

가장 최근 파일은 링크를 누르면 받아 보실 수 있습니다.

<https://goo.gl/bh1fQC>

<http://min7014.iptime.org/math/2018010201.pdf>

자료의 수정이 필요한 부분이 있으면 언제든지

민은기 E-mail : min7014@nate.com

이경수 E-mail : ksteach81@gmail.com

으로 연락주시면 감사하겠습니다.

강의록을 보기전에 프로그램 설치를 반드시 읽어보시고 꼭 지오지브라 클래식 5를 설치하시기 바랍니다.

<https://goo.gl/wqwJ6v>

<http://min7014.iptime.org/math/2018011001.pdf>

\* 주요변경내역 \*

2017.06.24 Geogebra와 수학의 시각화 책에 엮어 출간.



---

# 차 례

---

차 례	i
제 1 장 Geogebra를 활용한 기하와 함수	1
1.1 제한된 범위에서 이차함수의 최대최소 . . . . .	3
찾아보기	29



## 제 1 장

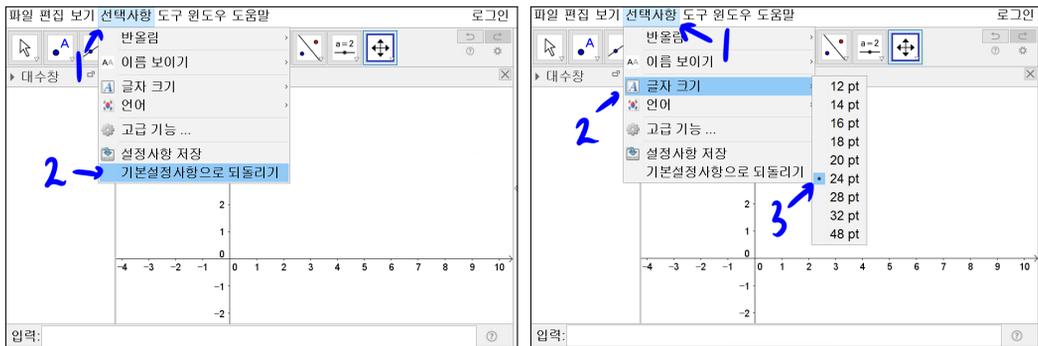
# Geogebra를 활용한 기하와 함수



## 1.1 제한된 범위에서 이차함수의 최대최소

Geogebra는 수업자료를 제작할 때에만 사용하는 것은 아닙니다. 수업내용에 따라서 학생들이 직접 Geogebra를 다루면서 수업을 진행할 수 있습니다. 예를 들면 기하문제를 풀 때 동적으로 선을 평행이동 시킨다든지 중심을 고정시키고 원의 반지름을 늘려본다든지 한 정점을 지나는 직선에 대하여 생각해 보는 것입니다. 이런 수업을 하면 기하와 그래프에 대해 어려움이 있는 학생들이 흥미를 가지고 쉽게 접근해 볼 수 있는 기회가 될 것입니다. 이처럼 Geogebra를 학생들과 같이 사용하면서 할 수 있는 여러가지 주제에 대한 수업이 있을 수 있습니다. 그 중에서 2014년 1학기 강원과학고등학교 수업시간에 활용했던 주제 중 하나를 정해서 실제 수업에서 했던 것을 보여드리겠습니다.

다음은 주어진 폐구간에서 이차함수의 최대, 최소에 관하여 직접 Geogebra를 이용하여 만들어 보는 수업입니다. 기본환경을 설정하겠습니다. 전체적으로 컴퓨터 환경이 같을 수는 없습니다. 또한 같은 Geogebra 라도 사용자에게 따라 환경을 개인적으로 바꾸어 놓는 경우가 많습니다. 많은 학생들과 실습할 경우, 적어도 Geogebra의 처음 실행 상태만이라도 같게 만들 필요가 있습니다.

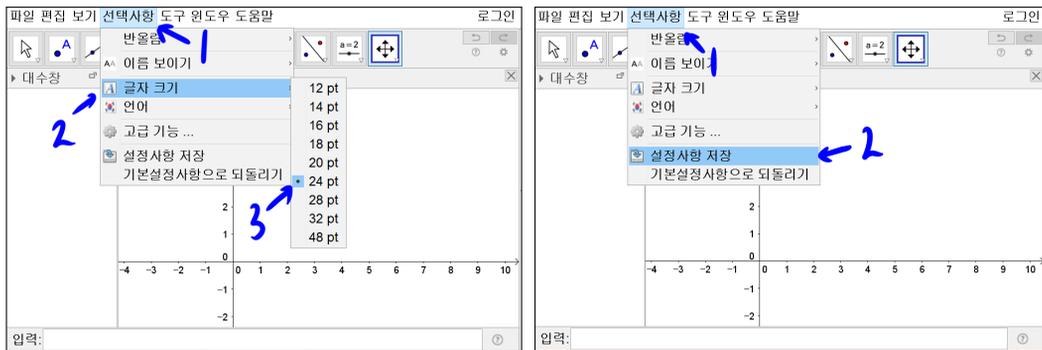


상단의 항목 중 선택사항을 선택하면 기본설정사항으로 되돌리기 메뉴가 있습니다. 이를 선택하면 Geogebra의 환경이 기본설정으로 바뀝니다. 사용자에게 따라 다르겠지만 글자 크기가 매우 작게 느껴질 수 있습니다. 적당한 크기의 글자로 조절해 보겠습니다. 선택사항에서 글자 크기를 24 pt로 선택합니다. 화

## 제 1 장 GEOGEBRA를 활용한 기하와 함수

면의 글자 크기가 전체적으로 커진 것을 확인 할 수 있습니다.

직접적으로 이번 수업진행과 관계는 없지만 알아두면 편한 기능을 하나 소개하겠습니다. Geogebra창을 닫습니다. 다시 실행합니다. 화면의 글자크기가 12 pt로 원상복귀된 것을 보게 될 것입니다. 글자 크기만 변경해서 사용하는 것이라면 매번 글자크기만 24 pt로 바꾸면 되지만 여러 가지 환경설정을 하고 나서 사용하는 경우라면 매번 설정을 바꾸는 것에 불편함을 느끼게 될 것입니다. 처음 사용할 때야 귀찮다고 생각하지 않을 수도 있지만 많이 사용하다 보면 매번 실행할 때 마다 24 pt 또는 자신만의 환경으로 바꾸는 것이 귀찮다고 느낄 것입니다.

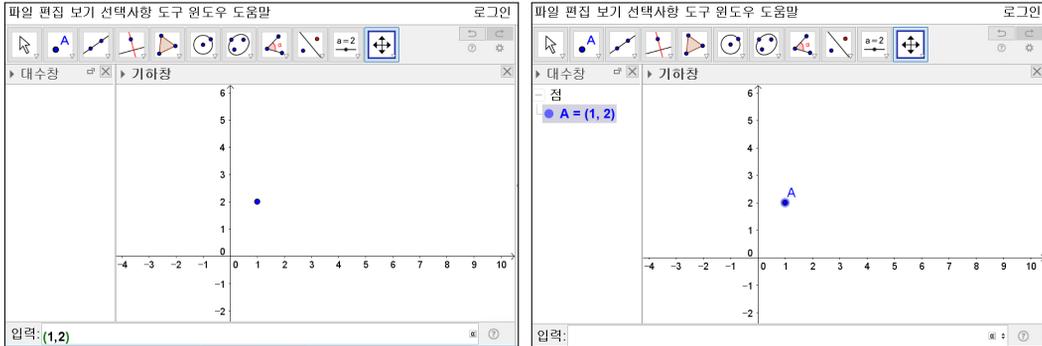


선택사항에서 글자크기를 24 pt로 설정합니다. 선택사항에서 설정사항 저장을 선택합니다. 겉모습 상에는 변한 것이 없어 보입니다. 하지만 종료한 후 다시 시작해 보면 첫 화면부터 24 pt로 바뀌어 있을 것입니다. 바로 이 메뉴가 현재 자신만의 설정사항을 기억하여, Geogebra를 종료한 후 다시 시작할 때의 초기 환경으로 만들어 주는 역할을 합니다.

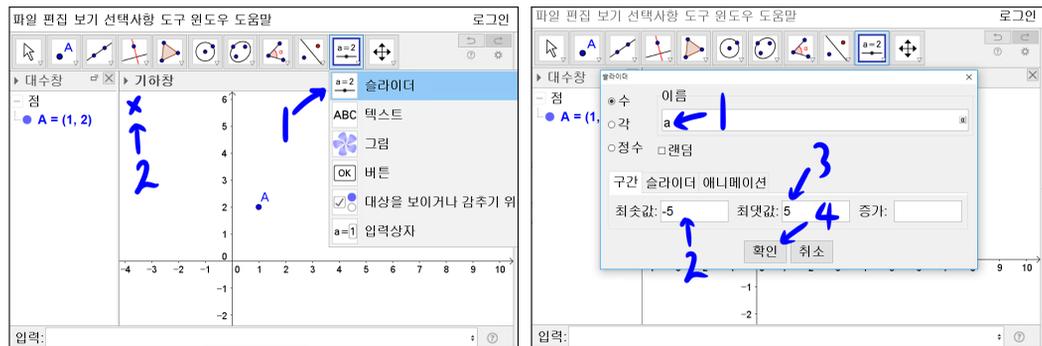
많은 수업을 진행했다면 수업 진행속도를 자연스럽게 조절할 수 있지만, 그럼에도 불구하고 수업진행 속도를 조절하는 것은 어려움이 따르는 일입니다. 이럴 때 좋은 방법 하나를 제안합니다. 교사용 컴퓨터 조작은 Geogebra를 다루는 데에 서툰 학생을 통해서 하는 방법이 있습니다. 자연스럽게 수업 속도가

## 제한된 범위에서 이차함수의 최대최소

학생들이 Geogebra를 다루는 속도에 맞추어 질 수 있습니다. 또한 부수적으로 학생들의 실습 과정을 둘러보고 학생들이 어려움을 느끼는 부분을 파악할 수 있습니다. 자 이제 본격적으로 진행해 보도록 하겠습니다.

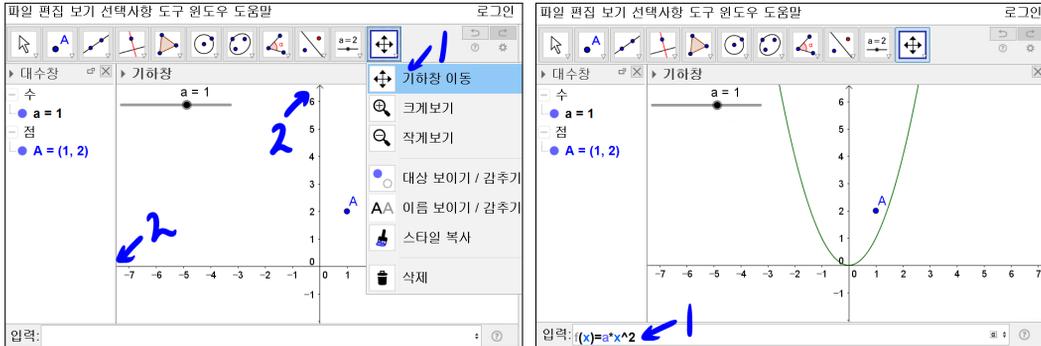


이차함수의 꼭짓점에 해당하는 점을 찍어봅시다. ‘이동’ 도구를 선택하고 입력창을 선택한 후 (1,2)를 입력하고 [Enter]를 누릅니다. 대수창에 점  $A = (1, 2)$ 가 생기고 기하창에 점 A가 생깁니다.

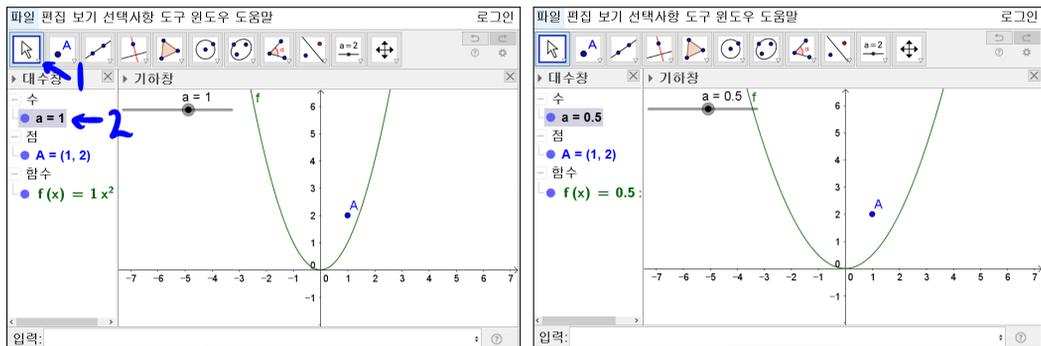


‘슬라이더’ 도구를 선택하고 기하창 글씨 바로 아래에 ‘x’표시한 부분을 선택합니다. 슬라이더 창이 뜨면 이름에 a를 입력합니다. 최솟값 -5와 최댓값 5로 입력되어 있을 것입니다. 그렇지 않다면 최솟값과 최댓값을 입력하고 확인을 선택합니다.

## 제 1 장 GEOGEBRA를 활용한 기하와 함수

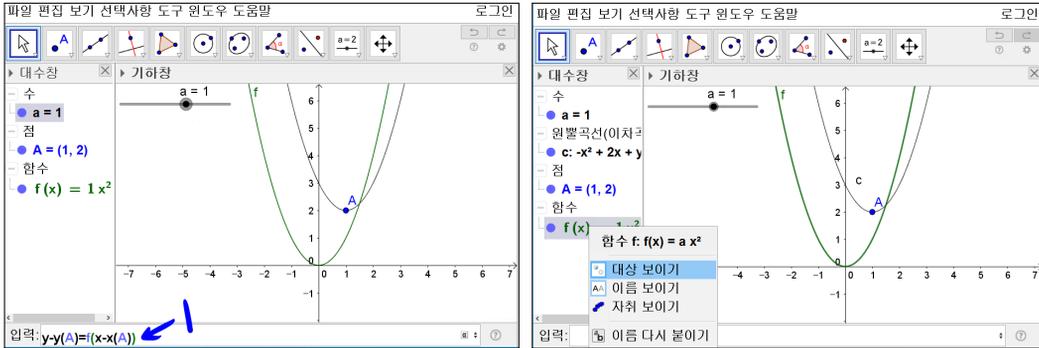


‘기하창 이동’ 도구를 이용하여 좌표축을 이동시킨 후 입력창에  $f(x) = a * x^2$ 을 입력하고 [Enter]를 누릅니다. 대수창에  $f(x) = 1x^2$ 가 나타나고 기하창에 그래프가 나타납니다.

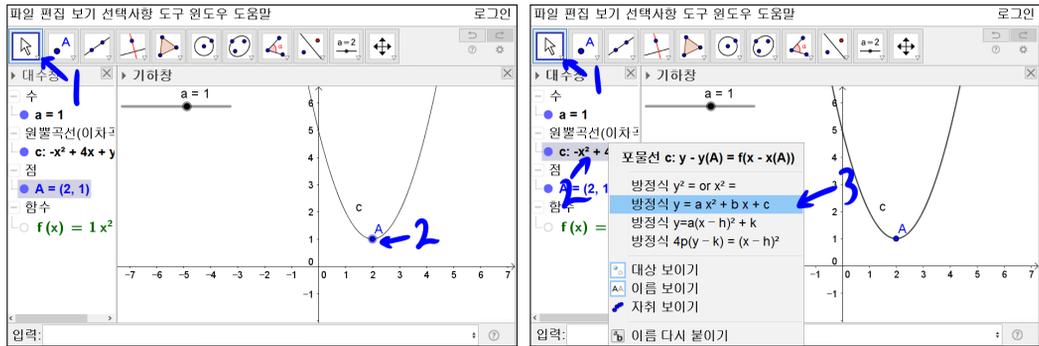


‘이동’ 도구를 선택합니다. 대수창의  $a = 1$ 을 선택하고 키보드 좌우 방향키를 눌러서  $a = 0.5$ 로 만들어 보면 기하창의 이차함수가 달라지는 것을 볼 수 있습니다. 다시  $a = 1$ 로 만들어 원위치시켜 놓습니다. 이와 같이 슬라이더 기능은 Geogebra에서 동적기하를 표현할 수 있는 좋은 도구이며 많이 사용되는 기능입니다.

## 제한된 범위에서 이차함수의 최대최소



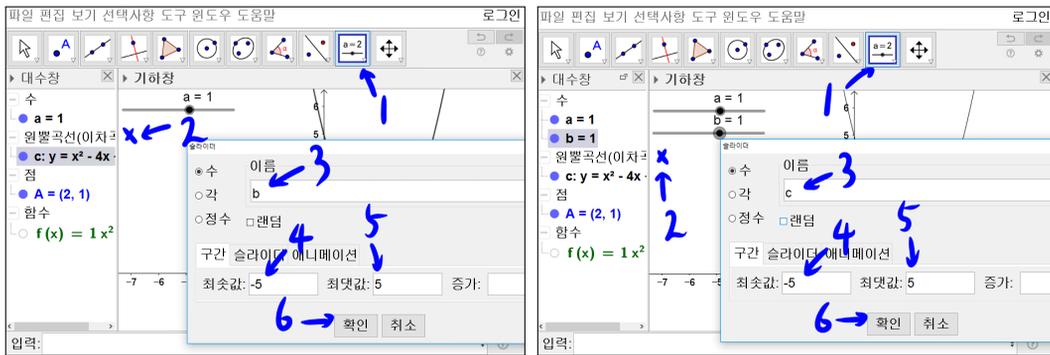
입력창에  $y - y(A) = f(x - x(A))$ 를 입력하고 [Enter]를 누릅니다. 이 수식에서  $x(A)$ 는 점 A의  $x$ 좌표를 의미하고,  $y(A)$ 는 점 A의  $y$ 좌표를 의미합니다. 따라서 입력한 식은  $y = f(x)$ 를  $x$ 축 방향으로 점 A의  $x$ 좌표만큼,  $y$ 축 방향으로 점 A의  $y$ 좌표만큼 평행 이동한 이차함수의 식을 의미합니다. 대수창에  $f(x) = 1x^2$ 을 선택하고 마우스 오른쪽 버튼을 누릅니다. 대상 보이기를 선택하면  $f(x) = 1x^2$ 의 기하창의 그림이 숨겨짐을 볼 수 있습니다. 같은 방식으로 대상 보이기를 다시 선택하면 숨겨졌던 그림이 다시 나타나게 됩니다.  $f(x) = 1x^2$ 을 기하창에서 보이지 않게 합니다.



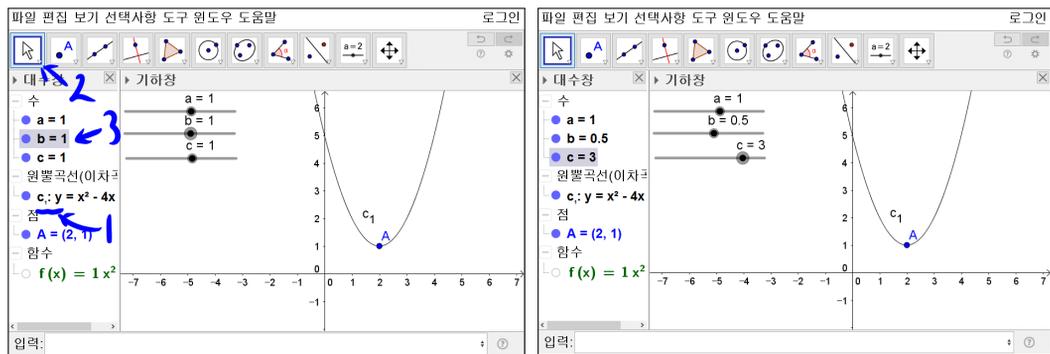
‘이동’ 도구를 선택한 후 기하창에 점 A에서 마우스 오른쪽 버튼을 누른 상태에서 드래그를 해서 (2, 1)로 옮겨 봅니다. 동시에 대수창에  $A = (2, 1)$ 로 변경된 것을 보게 됩니다. 그리고 꼭짓점이 점 A인 포물선이 동시에 그려진 것이 보입니다. 이것 또한 Geogebra를 활용한 동적기하의 하나인 것입니다. 대수창에

## 제 1 장 GEOGEBRA를 활용한 기하와 함수

원뿔곡선(이차곡선)  $-x^2 + 4x + y = 5$ 로 표시된 것을 보게 됩니다. 친절하게도 원뿔곡선(이차곡선)이라고 명시해 주었습니다. 정말 Geogebra가 잘 만들어진 수학 소프트웨어이구나! 감탄하게 만듭니다. ‘이동’ 도구를 선택하고 대수창에 원뿔곡선(이차곡선)  $-x^2 + 4x + y = 5$ 를 선택 후 마우스 오른쪽 버튼을 클릭 하면 방정식 모양을 선택할 수 있습니다.  $y = ax^2 + bx + c$  꼴을 선택합니다. 이처럼 이차함수의 형태를 일반형과 표준형 또는 포물선의 방정식의 형태로 변형이 가능합니다.

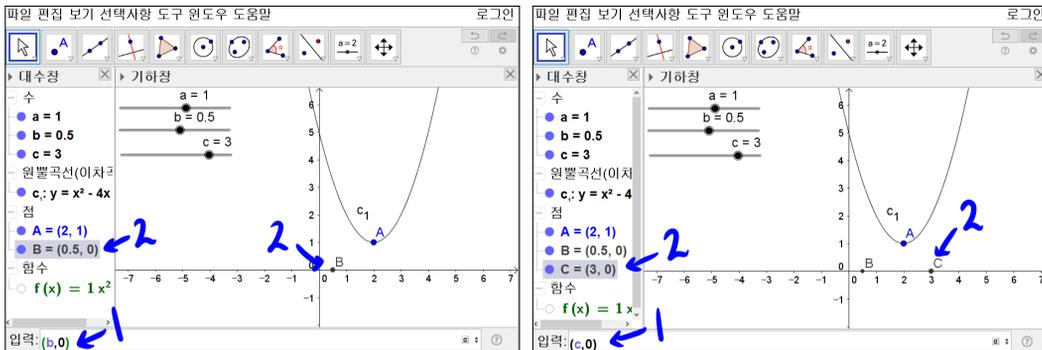


‘슬라이더’ 도구를 선택 후 ‘x’표시한 부분을 선택하고 이름에 b를 입력하고 최솟값 -5와 최댓값 5를 입력한 후 확인을 선택합니다. 대수창에 수 b가 기하창에는 슬라이더 b가 나타납니다. 바로 아래 ‘x’표시한 부분을 다시 한 번 선택 하면 이번엔 다른 이름이 보일 것입니다. 이름을 c로 변경하고 확인을 선택합니다.

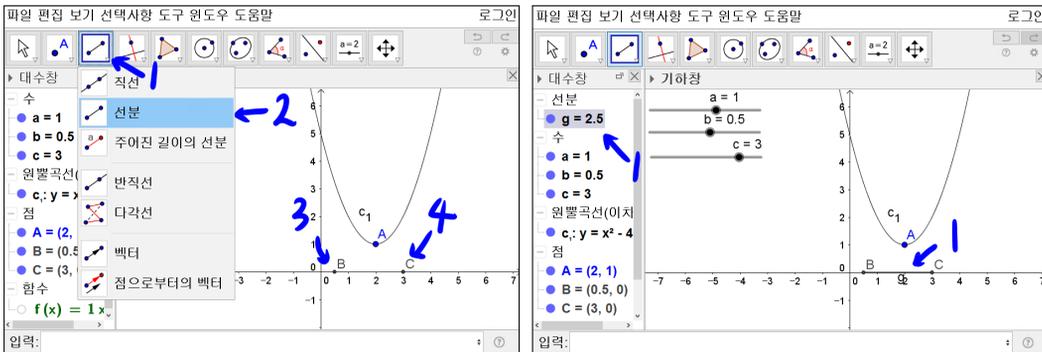


## 제한된 범위에서 이차함수의 최대최소

기존  $c : y = x^2 - 4x + 5$ 가  $c_1 : y = x^2 - 4x + 5$ 으로 강제로 변한 걸 볼 수 있습니다. 자동으로 바뀌어서 혼란스러울 수 있지만 참 좋은 기능 중의 하나로 느껴집니다. ‘이동’ 도구를 선택한 후 대수창의 수에  $b = 1$ 를 선택하고 키보드의 좌우 방향키를 누르면 값이 변할 것입니다. 그럼  $b = 0.5$ 와  $c = 3$ 으로 변경해 놓습니다.

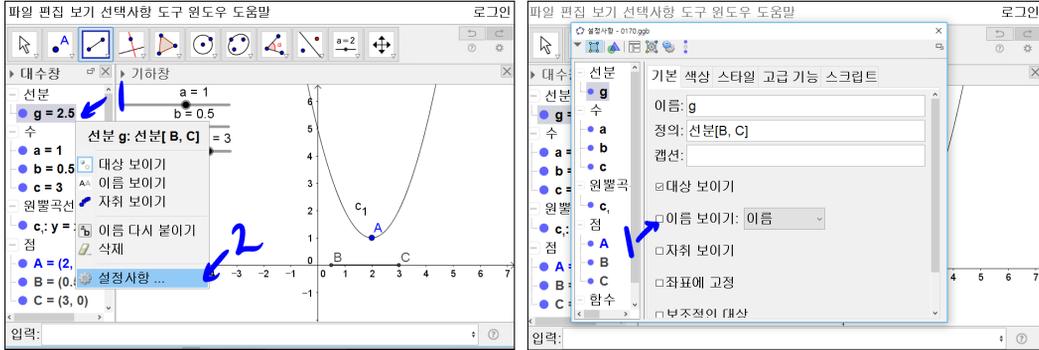


‘이동’ 도구가 선택된 상태에서 입력창에  $(b, 0)$ 을 입력하고 [Enter]를 누릅니다. 마찬가지로  $(c, 0)$ 을 입력하고 [Enter]를 누릅니다.

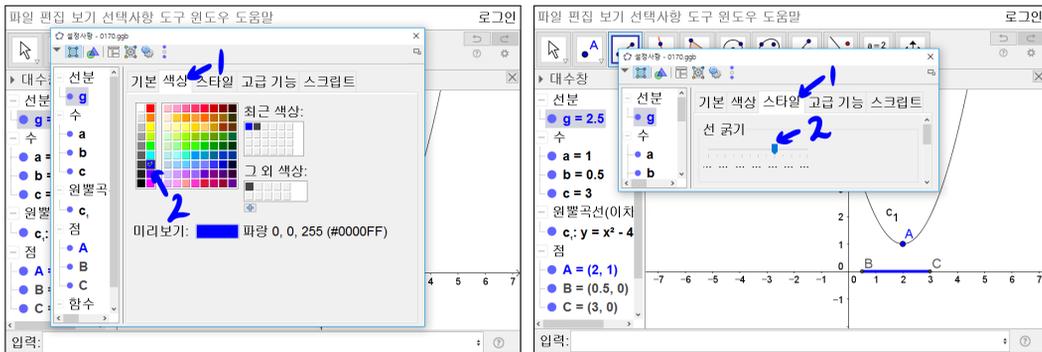


‘선분’ 도구를 선택하고 점 B를 선택하고 점 C를 선택합니다. 그러면 대수창에 선분  $g = 2.5$ 가 만들어지고 기하창에 선분이 만들어질 것입니다.

## 제 1 장 GEOGEBRA를 활용한 기하와 함수

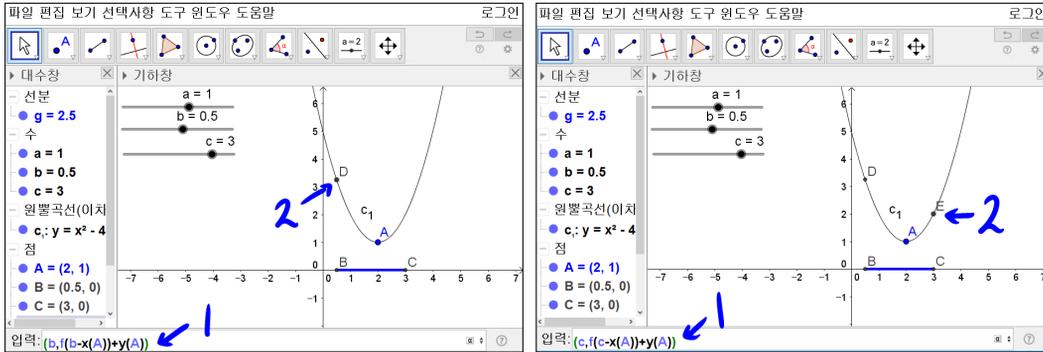


‘이동’ 도구가 선택된 상태에서 대수창에  $g = 2.5$ 를 선택하고 마우스 오른쪽 버튼을 클릭하고 메뉴가 나타나면 설정사항을 선택합니다. 또는 기하창의 선분 BC를 선택하고 마우스 오른쪽 버튼을 클릭하면 또한 설정사항을 선택할 수 있습니다. 그러면 설정사항 창이 나타납니다. 설정사항 창의 기본 탭에서 이름 보이기의 체크상자를 해제합니다.

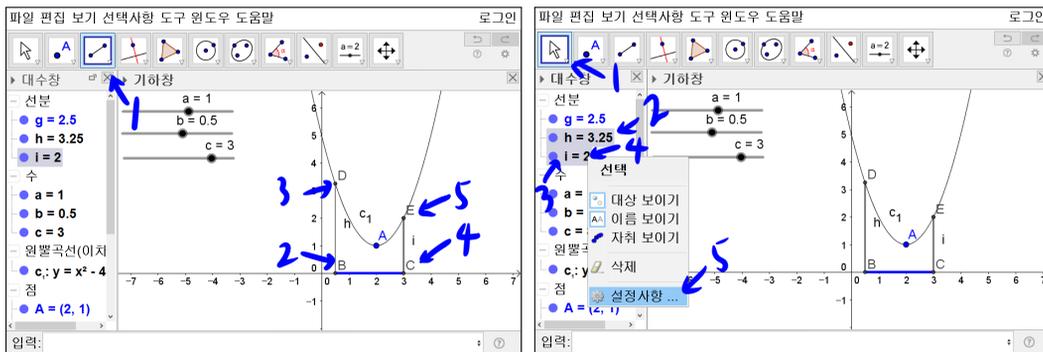


색상 탭에서 파란색을 선택합니다. 스타일 탭에서 선 굵기를 9로 조절합니다. 창을 닫습니다. 기하창의 선분 BC가 굵기 9이고 파란색 선을 가지며 이름이 나타나지 않게 되어 있을 것입니다. 정의역  $[b, c]$ 가 기하창에 표시된 것을 볼 수 있습니다.

## 제한된 범위에서 이차함수의 최대최소

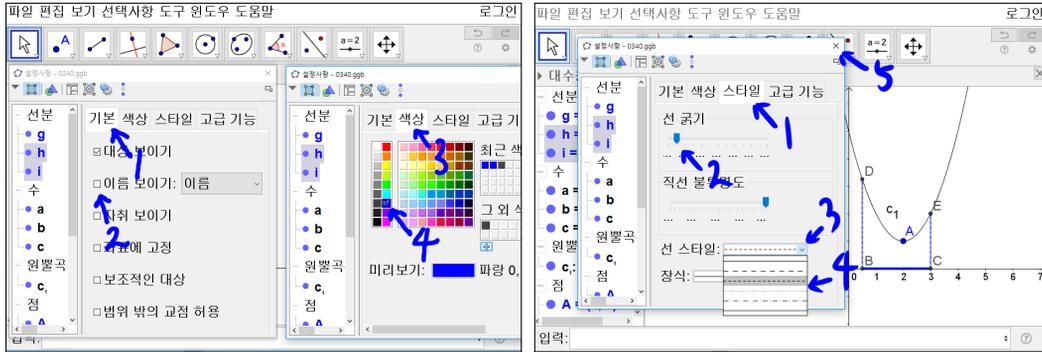


‘이동’ 도구가 선택된 상태에서 입력창에  $(b, f(b - x(A)) + y(A))$ 를 입력하고 [Enter]를 누릅니다. 점 D가 만들어집니다. 입력창에  $(c, f(c - x(A)) + y(A))$ 를 입력하고 [Enter]를 누릅니다. 점 E가 만들어집니다.

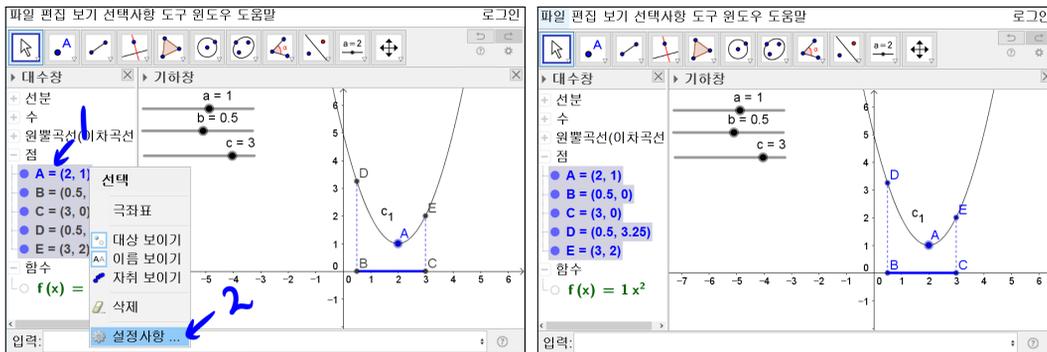


‘선분’ 도구를 선택하고 점 D와 점 B를 선택하면 선분 DB가 만들어집니다. 점 E와 점 C를 선택하면 선분 EC가 만들어집니다. ‘이동’ 도구를 선택하고 대수창에서 [Ctrl]를 누른 상태에서 선분 h와 선분 i를 차례로 선택하고 마우스 오른쪽 버튼을 클릭합니다. 설정사항을 선택합니다.

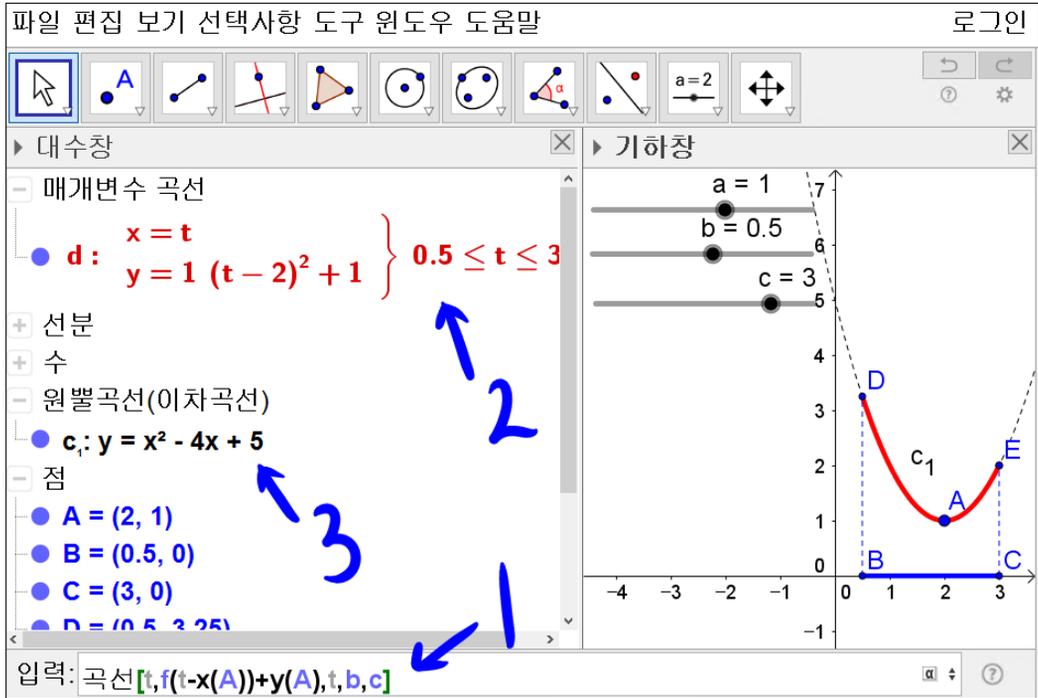
## 제 1 장 GEOGEBRA를 활용한 기하와 함수



기본 탭에 이름 보이기 체크상자를 해제합니다. 색상 탭에 파란색을 선택하고 선 굵기를 2로 선 스타일의 리스트 박스를 선택하고 3번째 점선을 선택하고 설정사항 창을 닫습니다.



‘이동’ 도구를 선택하고 [Ctrl]을 누른 상태에서 대수창에서 점 A, 점 B, 점 C, 점 D, 그리고 점 E를 차례로 선택한 후 마우스 오른쪽 버튼을 클릭하고 메뉴에서 설정사항을 선택합니다. 색상 탭에서 파란색을 선택합니다. 스타일 탭에서 점 크기를 5로 설정하고 설정사항 창을 닫습니다. 5개의 점이 모두 파란색으로 크기가 5로 바뀐 것을 보게 될 것입니다.

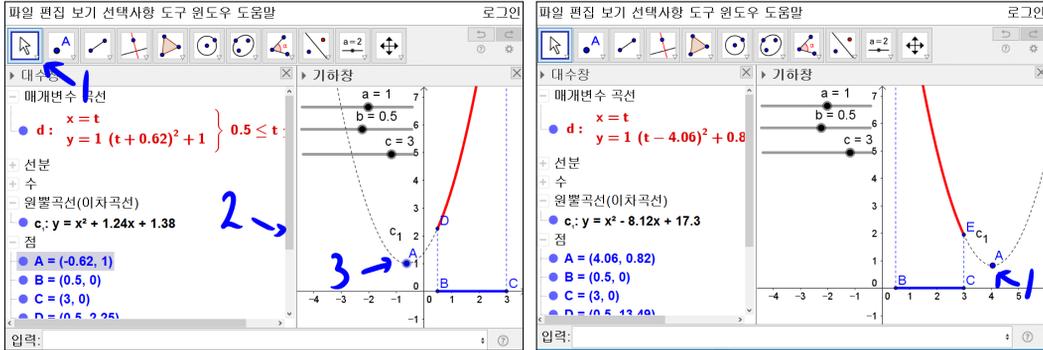


‘이동’ 도구를 선택합니다. 입력창에 곡선 $[t, f(t - x(A)) + y(A), t, b, c]$ 를 입력합니다. 그러면 그래프는  $x$ 가  $b$ 보다 크거나 같고  $c$ 보다 작거나 같은 부분만 그려지게 됩니다. 곡선  $d$ 의 설정창에 들어가 기본 탭에서 이름보이기 체크 상자를 해제합니다. 색상 탭에서 빨간색을 선택합니다. 스타일 탭에서 선의 굵기를 9로 합니다. 처음 만든 포물선도 설정창에 들어가 기본 탭에서 이름보이기 체크 상자를 해제합니다. 색상 탭에서 검은색을 선택합니다. 스타일 탭에서 선 굵기는 2로 하고 선 스타일의 리스트 박스를 선택하고 3번째 점선을 선택합니다. 정의역  $[b, c]$ 에 대한 포물선의 일부가 빨간색 굵은 선으로 표시되고 나머지는 검은색 점선으로 만들어짐을 볼 수 있습니다. 곡선 $[t, f(t - x(A)) + y(A), t, b, c]$ 의 뜻은 다음과 같습니다.

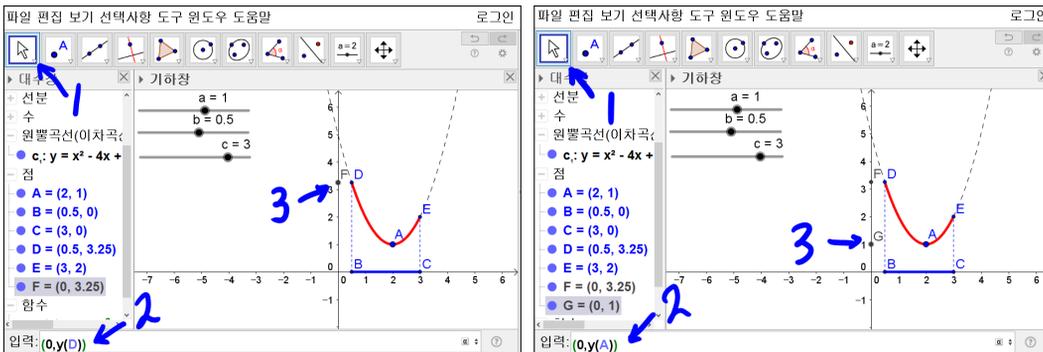
$$\begin{cases} x = t & (b \leq t \leq a) \\ y = f(t - x(A)) + y(A) \end{cases}$$

## 제 1 장 GEOGEBRA를 활용한 기하와 함수

대수창에 매개변수 곡선의 정의가 쓰여 있음을 볼 수 있습니다.

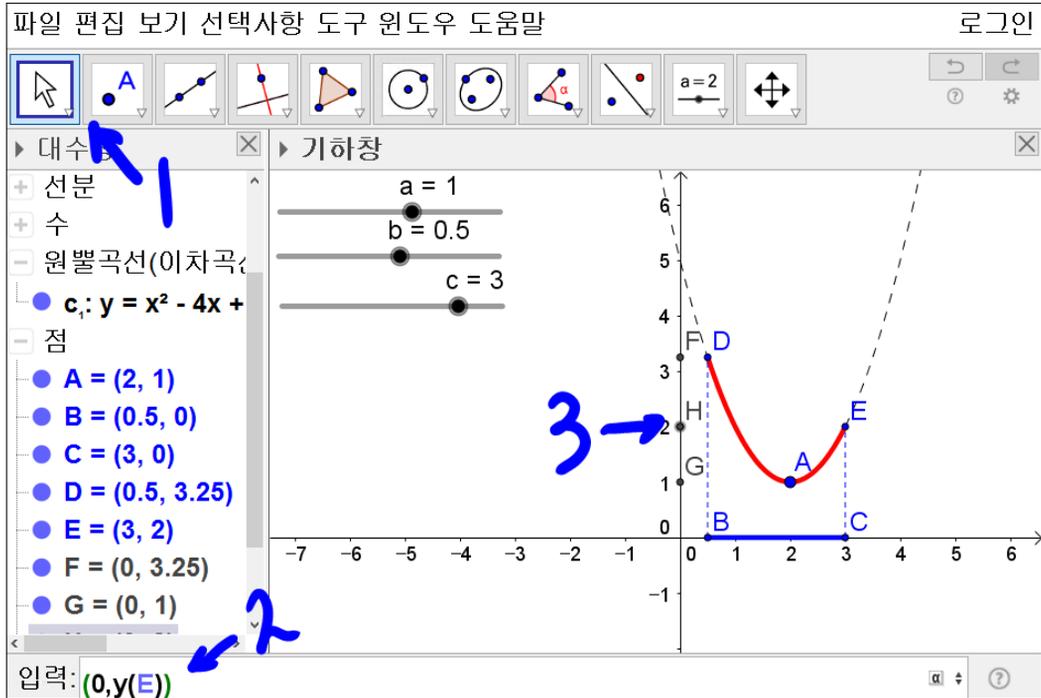


‘이동’ 도구를 선택하고 대수창의 스크롤바를 적당히 조절하여 점 A가 나타나게 하고 기하창에 점 A를 선택한 후 마우스 왼쪽 버튼을 클릭한 상태에서 움직여보면 주어진 함수에 따라 지금까지 설정된 내용이 동적으로 적용됨을 볼 수 있습니다. 주어진 정의역  $[b, c]$ 에서, 이차함수식이 변하는 모습을 동적으로 보여줌으로써 흥미와 이해도를 높일 수 있는 수업 내용을 구성한 것입니다. 점 A를 (2, 1)에 마지막으로 위치시켜줍니다.

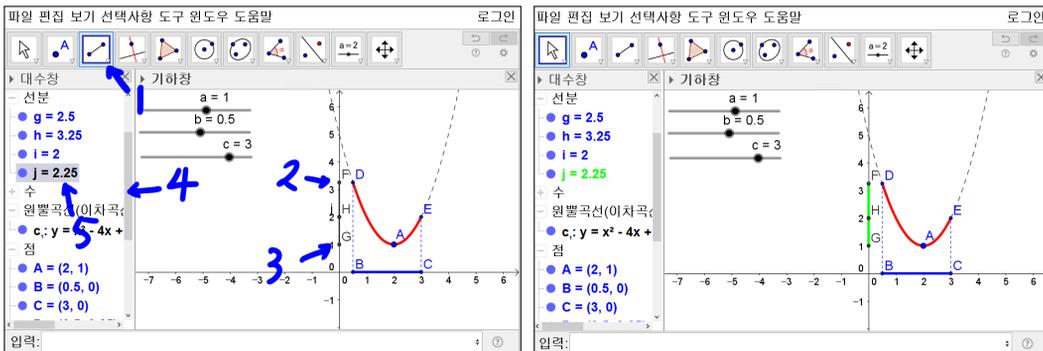


‘이동’ 도구를 선택한 상태에서 입력창에  $(0, y(D))$ 를 입력하고 [Enter]를 누릅니다. 기하창에 점 F가 나타난다. 마찬가지로 방법으로  $(0, y(A))$ 를 입력하고 [Enter]를 누릅니다.

## 제한된 범위에서 이차함수의 최대최소



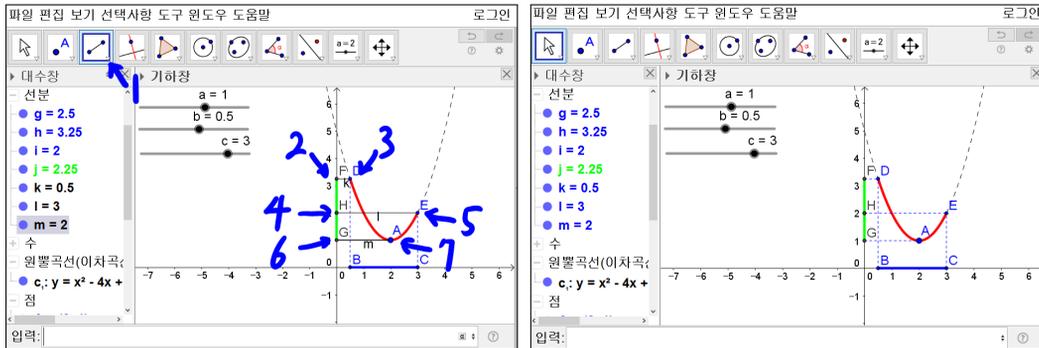
(0, y(E))를 차례로 입력하고 [Enter]를 누릅니다.  $y$ 축에 차례로 점 F, 점 H, 점 G가 찍혔습니다.



‘선분’ 도구를 선택하고 점 F를 선택하고 점 G를 선택하면 선분 FG가 기하창에 만들어집니다. 대수창의 스크롤바를 적당히 조절하여 선분  $j = 2.25$ 가 보이도록 만듭니다.  $j = 2.25$ 를 선택하고 마우스 오른쪽 버튼을 클릭하고 설정사항

## 제 1 장 GEOGEBRA를 활용한 기하와 함수

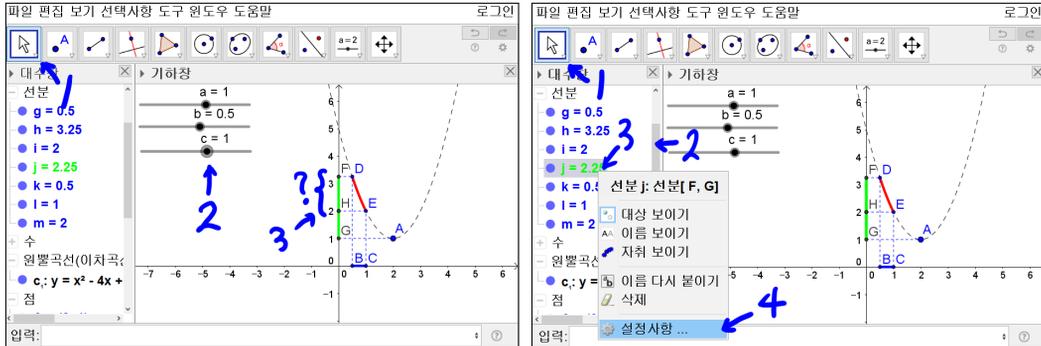
을 선택합니다. 기본 탭에서 이름 보이기의 체크상자를 해제합니다. 색상 탭에서 녹색을 선택합니다. 스타일 탭에서 선 굵기를 9로 조절하고 선 스타일을 실선으로 합니다.  $y$ 축에 선분 FG가 굵기 9를 가진 녹색선으로 표시된 것을 볼 수 있습니다. 지역을 잘 보이게 표시한 것입니다.



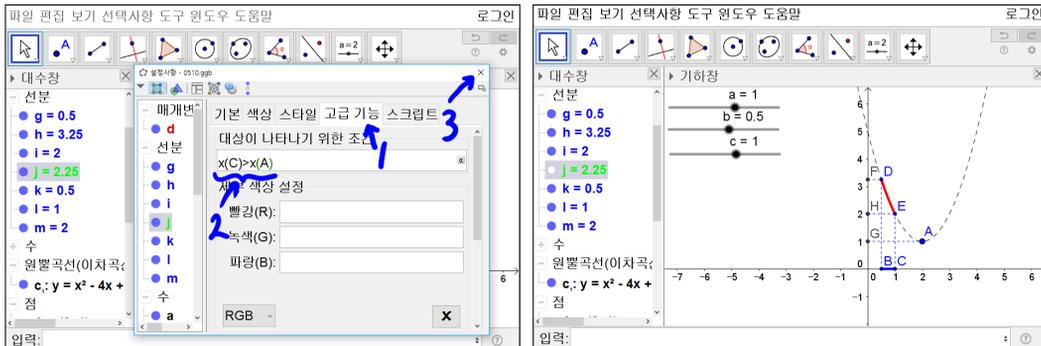
‘선분’ 도구를 선택하고 점 F, 점 D, 점 H, 점 E, 점 G, 점 A를 차례로 선택하면 선분 FD, 선분 HE, 선분 GA가 만들어 집니다. [Ctrl]을 누른 상태에서 세 선분을 동시에 선택하여 설정사항에 들어갑니다. 기본 탭에서 이름 보이기의 체크상자를 해제합니다. 색상 탭에서 파란색을 선택합니다. 스타일 탭에서 선 굵기를 2로 선 스타일의 리스트 박스를 선택하고 3번째 점선을 선택하고 설정사항 창을 닫습니다.

이제 겉보기에 주어진 이차함수에 제한된 범위에서의 최댓값과 최솟값을 확인할 수 있는 자료를 만들었습니다. 또한 만드는 과정에서  $x(A)$ ,  $y(A)$  처럼 점 A의  $x$ 좌표와  $y$ 좌표를 표현함으로써 정의역  $x$ 의 값에 따라 함수값  $y$ 를 관찰하는 기회가 될 것입니다.

## 제한된 범위에서 이차함수의 최대최소

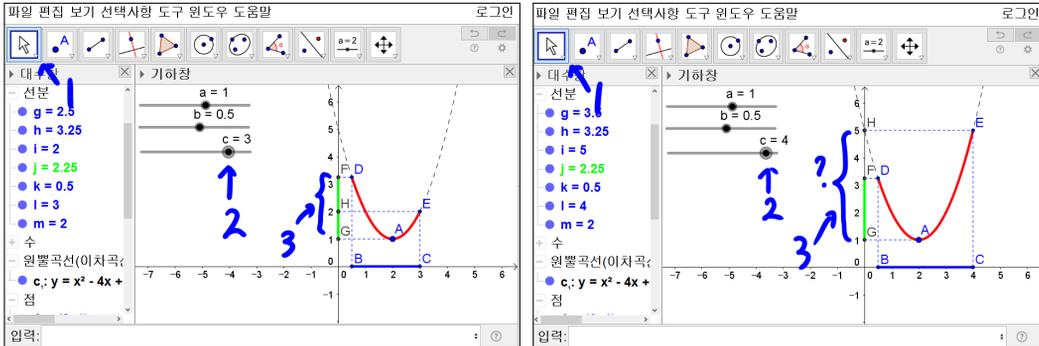


Geogebra의 동적기하 기능을 최대한 살펴보도록 합시다. ‘이동’ 도구를 선택한 상태에서 수  $c = 3$ 을 선택합니다. 방향키를 사용하여  $c = 1$ 로 바꿉니다. 치역을 나타내는 것은 선분 FH가 되어야 합니다. 이를 어떻게 해결할까요? 다행히도 Geogebra는 이런 경우의 해결 방법을 가지고 있습니다. 지금부터 하는 내용은 Geogebra의 고급기능에 해당합니다. 조금만 더 힘내면 이 기능을 자유자재로 쓸 수 있을 것입니다. ‘이동’ 도구를 선택하고 대수창의 스크롤 바를 적당히 움직여서 선분  $j = 2.25$ 가 나오게 합니다.  $j = 2.25$ 을 선택하고 마우스 오른쪽 버튼을 클릭하고 설정사항을 선택합니다.

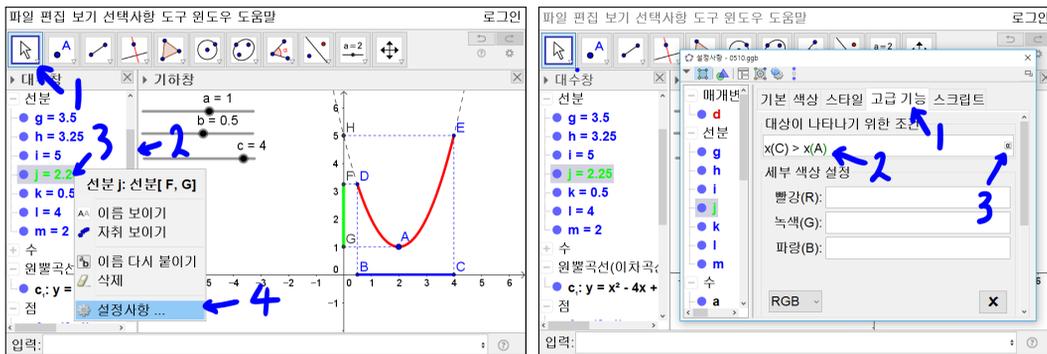


고급기능을 선택하고 ‘대상이 나타나기 위한 조건’에  $x(C) > x(A)$ 라고 입력하고 닫습니다.  $x(C) > x(A)$ 가 참일 때 선분 FG 나타나도록 되어 있습니다. 선분 FG가 나타나지 않게 됩니다.

## 제 1 장 GEOGEBRA를 활용한 기하와 함수

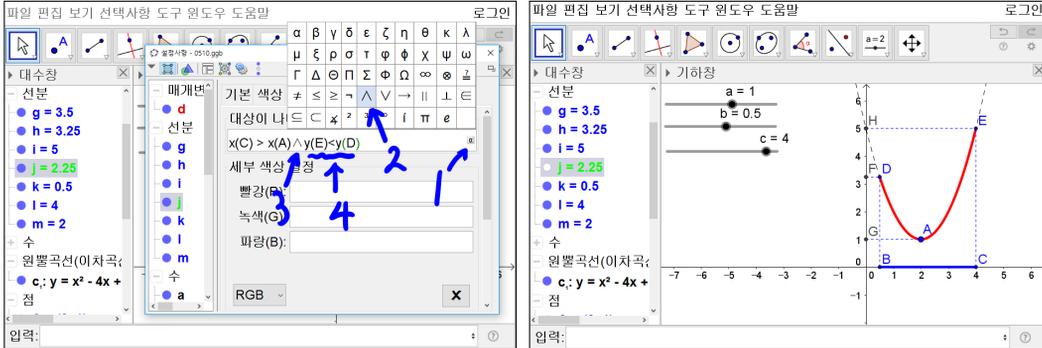


다시  $c = 3$ 으로 바꾸어 봅시다. 선분  $FG$ 가  $x(C) > x(A)$ 가 참일 때 이므로 선분이 다시 보입니다. 이번에는  $c = 4$ 로 값을 변경합니다. 이 경우 원하는 것은 선분  $HG$ 가 되어야 합니다.



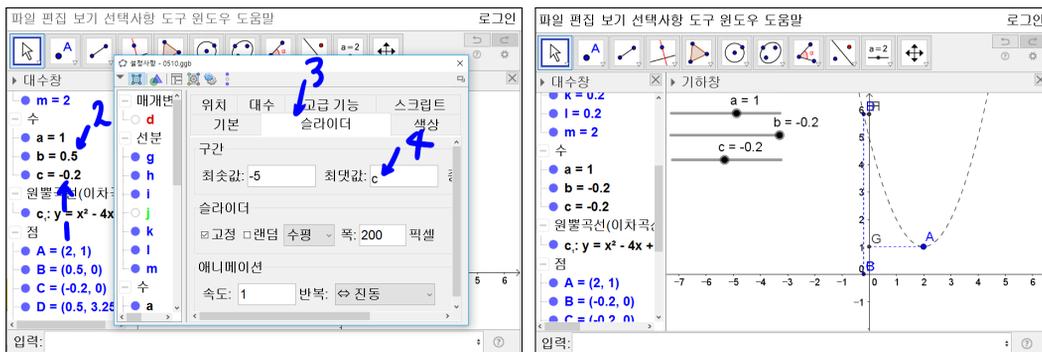
일단 이 경우 선분  $FG$ 가 나타나지 않게 설정해 보겠습니다. ‘이동’ 도구를 선택하고 대수창의 스크롤 바를 적당히 움직여서 선분  $j = 2.25$ 가 나오게 합니다.  $j = 2.25$ 을 선택하고 마우스 오른쪽 버튼을 클릭하고 설정사항을 선택합니다. 고급기능을 선택합니다. 이미 ‘대상이 나타나기 위한 조건’에  $x(C) > x(A)$ 라고 입력되어 있는 것을 볼 수 있습니다. 추가로 조건  $y(E) < y(D)$ 를 입력하여야 합니다. 이때 둘 다 만족해야만 나타나도록 조건을 써야 하므로 ‘그리고’에 해당하는 논리 연산자가 필요합니다. Geogebra는 이러한 논리연산자를 제공합니다. ‘대상이 나타나기 위한 조건’의 빈칸을 선택하고 빈칸의 끝에  $\alpha$ 를 선택합니다.

## 제한된 범위에서 이차함수의 최대최소



$\wedge$ 를 선택합니다. Geogebra는 ‘그리고’를  $\wedge$  기호로 사용합니다.  $y(E) < y(D)$ 를 입력하고 [Enter]를 누릅니다. ‘대상이 나타나기 위한 조건’에 입력한 것과 다르게 Geogebra가  $(x(C) < x(A)) \wedge (y(E) < y(D))$ 식으로 괄호를 자동으로 생성합니다. 점 C의  $x$ 좌표가 점 A의  $x$ 좌표 보다 크고 점 E의 좌표가 점 D의  $y$ 좌표보다 작을 때 선분 FG를 나타나게 한다는 뜻입니다. 확인을 선택하고 설정사항을 닫습니다.

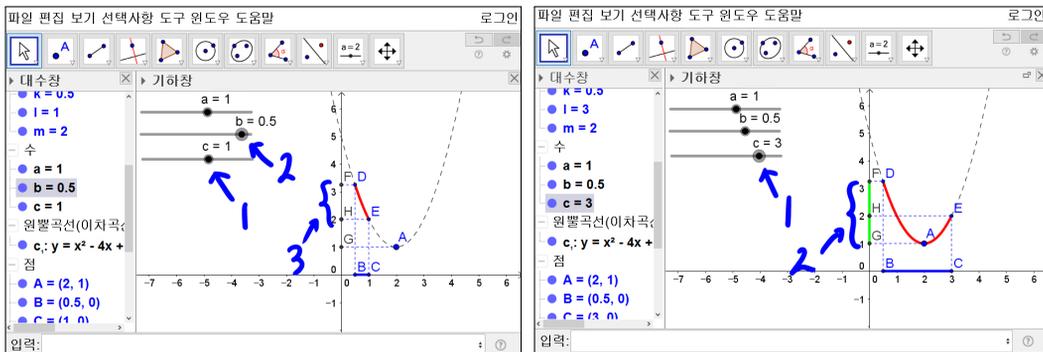
슬라이더로  $c$ 의 값을 조절하여  $b$ 의 값보다 작게 할 수 있습니다. 그러나 정의역의 구간이  $[b, c]$ 이므로  $c$ 의 값이  $b$ 의 값보다 항상 크도록 설정하는 것이 필요합니다. 이런 경우는 다음과 같이 해결할 수 있습니다.



‘이동’ 도구를 선택하고 스크롤을 적당히 조절하고 좌우 방향키를 사용하여  $c = -0.2$ 로 조절해 놓습니다.  $b = 0.5$ 를 선택하고 마우스 오른쪽 버튼을 클릭

## 제 1 장 GEOGEBRA를 활용한 기하와 함수

하고 설정사항을 선택합니다. 슬라이더를 선택하고 최댓값에  $c$ 라고 입력하고 설정사항을 닫습니다. 수  $b = 0.5$ 가 자동으로  $b = -0.2$ 로 바뀝니다.  $b$ 의 값  $0.5$ 가  $c$ 의 값이  $-0.2$ 보다 크므로 강제적으로  $b$ 의 값을  $-0.2$ 로 바꾼 것입니다. 앞으로는 절대로  $b$ 의 값이  $c$ 의 값보다 커질 수 없게 될 것입니다. 이런 것을 보면 ‘Geogebra가 정말 논리적으로 잘 만들어졌구나!’ 감탄하게 됩니다.

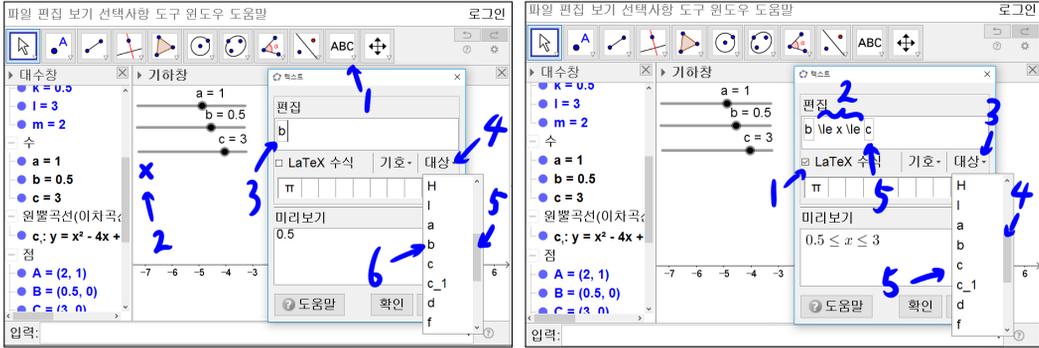


사실, 완벽하게 다 만든 것이 아닙니다.  $b = 0.5, c = 1$ 로 만들어 놓으면 치역에 해당하는 선분 FH를 만들어야 한다는 것을 보게 됩니다. 나머지 부분은 선분 FG 설정한 방법과 같은 방법으로 하면 됩니다. 다시 선분 FG가 나타나도록  $b = 0.5, c = 3$ 으로 바꾸어 놓습니다.

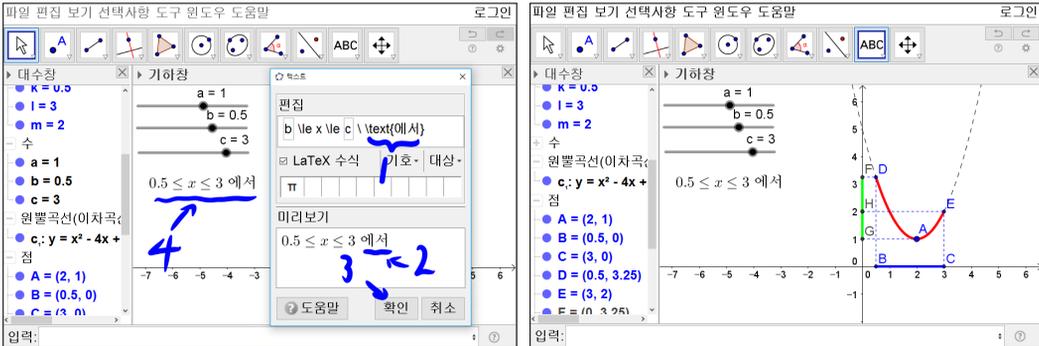
여기까지가 수업시간에 실제로 학생들과 수업했던 내용입니다. Geogebra의 사용방법을 알려줌과 동시에 제한된 범위에서 이차함수의 최대최소에 대한 공부를 같이 한 것입니다. 실제 수업 때 위의 내용만 학생들에게 알려주고 점 A를 움직이거나 수  $a$ , 수  $b$ , 수  $c$ 의 값을 변경시키면서 미완성 부분에 대해서는 학생들이 직접 해보도록 했습니다. 어떤 소프트웨어든 사용하면 할수록 익숙해지고 빠르게 작업할 수 있지만, Geogebra 만큼은 꼭 그런 것만은 아닙니다. Geogebra의 기본이 수학이므로 수학적 이해가 뒷받침되어야 잘 다룰 수 있기 때문입니다. 지금부터 보여드리는 내용은 학생들에게 알려주지 않았던 내용입니다. 어쩌면 이 뒷부분을 알고 나면 지금까지 했던 것이 의미가 없어져 보일

## 제한된 범위에서 이차함수의 최대최소

수 있습니다. 그러나 수학은 완성된 것을 추구함과 동시에 그 과정 역시 중요하므로 지금까지의 과정도 큰 의미가 있을 것입니다. 이제 학생들에게 알려주지 않았던 부분을 시작하겠습니다.



‘텍스트’ 도구를 선택합니다. ‘x’표시 한 부분을 선택합니다. 텍스트창이 생깁니다. 편집을 선택하고 대상을 선택하고 스크롤을 적당히 조절하여 수 b를 선택합니다. 편집창에 대상 수 b가 나타납니다. 미리보기 창에 0.5가 나타납니다. 수 b의 값이 나타나는 것입니다. \le x \le를 입력하고 대상 수 b를 선택한 것처럼 대상 수 c를 선택합니다.

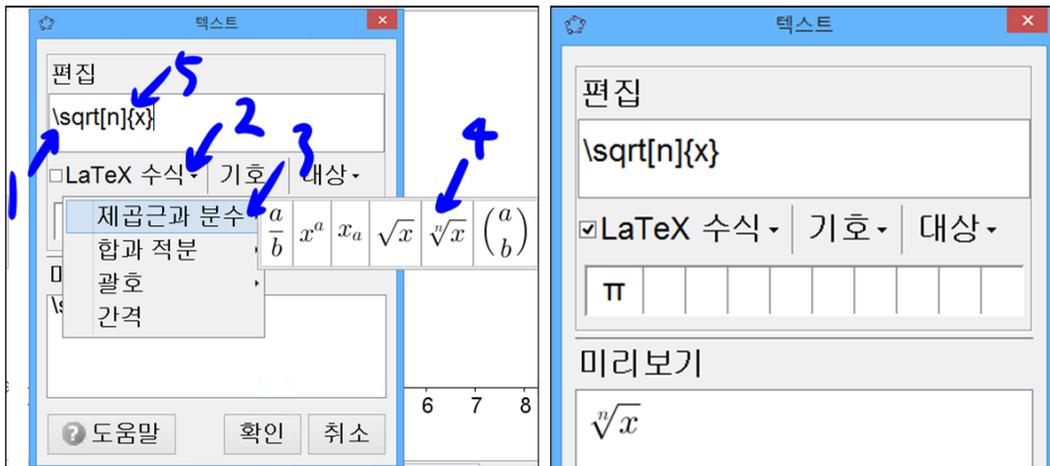


\ \text{에서} 라고 입력합니다. LaTeX 체크상자를 선택합니다. 미리보기 창에 ‘0.5 ≤ x ≤ 3에서’ 가 나타납니다. 확인을 누릅니다.

위 내용을 설명하겠습니다. 보통은 일반적인 글을 입력하는 경우에 ‘텍스트’

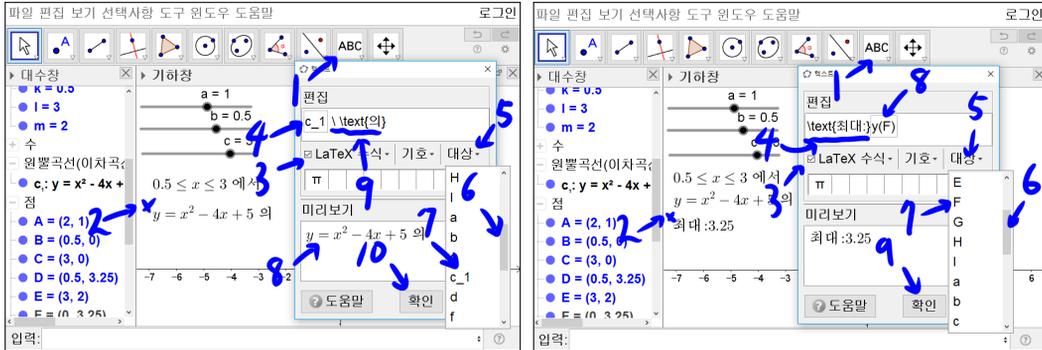
## 제 1 장 GEOGEBRA를 활용한 기하와 함수

도구를 선택해서 사용할 수 있지만 Geogebra는 기본 바탕이 수학이라서인지 수식의 자유로운 입력은 국제적으로 잘 알려진 TeX편집을 이용합니다. TeX 편집을 한 후에 LaTeX 체크상자를 선택하기만 하면 수식 편집한 모습이 나타납니다. TeX명령을 설명하겠습니다.  $\leq$  이고  $\text{\text{일반 텍스트}}$  수식 사이에 일반 텍스트를 넣을 수 있게 하는 명령어입니다.  $\backslash$  는 한 칸 띄게 하는 명령어입니다. 그렇다고  $\backslash\backslash$ 와 같이 연속 두 번 쓰시면 안 됩니다. 줄 바꿈을 의미합니다. 사실, 한글에서 수식 편집할 때 쓰는 명령어들에서 보통 앞쪽에  $\backslash$  를 붙이면 된다고 생각하면 됩니다. 다른 여러 가지 수식을 입력하기를 원하시면 Geogebra텍스트 창에 ‘수식과 기호’ 를 선택하여 원하는 수식과 기호를 선택하면 예제가 입력되고 미리보기 창에 수식표현이 된 것을 볼 수 있습니다. 이를 활용하면 원하는 수식을 마음껏 쓸 수 있습니다.



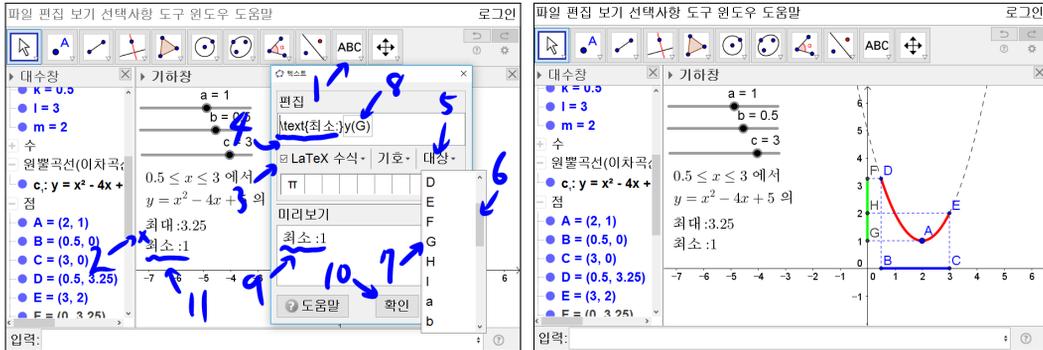
‘텍스트’ 도구를 선택한 후 편집을 선택합니다. 수식 리스트 박스에서 제곱근과 분수를 선택한 다음  $\sqrt{x}$ 를 선택하면  $\sqrt[n]{x}$ 가 편집창에 자동으로 생성되고 LaTeX 체크상자를 체크해 놓으면 미리보기 창이 수식으로 변환될 것입니다. 이와 같은 방식으로 자신이 원하는 수식을 입력할 수 있습니다. TeX의 수식을 일일이 암기할 필요가 없는 것입니다. TeX으로 문서를 작성했던 수식 자료가 있다면 단순히 편집창에 복사해 놓으면 됩니다. 단, TeX에서의 수식

은  $\sqrt[n]{x}$  처럼 앞뒤에 \$가 붙습니다. 이 \$와 \$ 사이에 있는 내용만 복사해서 쓰면 됩니다. 즉,  $\sqrt[n]{x}$  만 ‘텍스트’ 도구의 편집창에 복사해 넣고 LaTeX 체크상자를 체크해 놓으면 수식이 되는 것입니다.

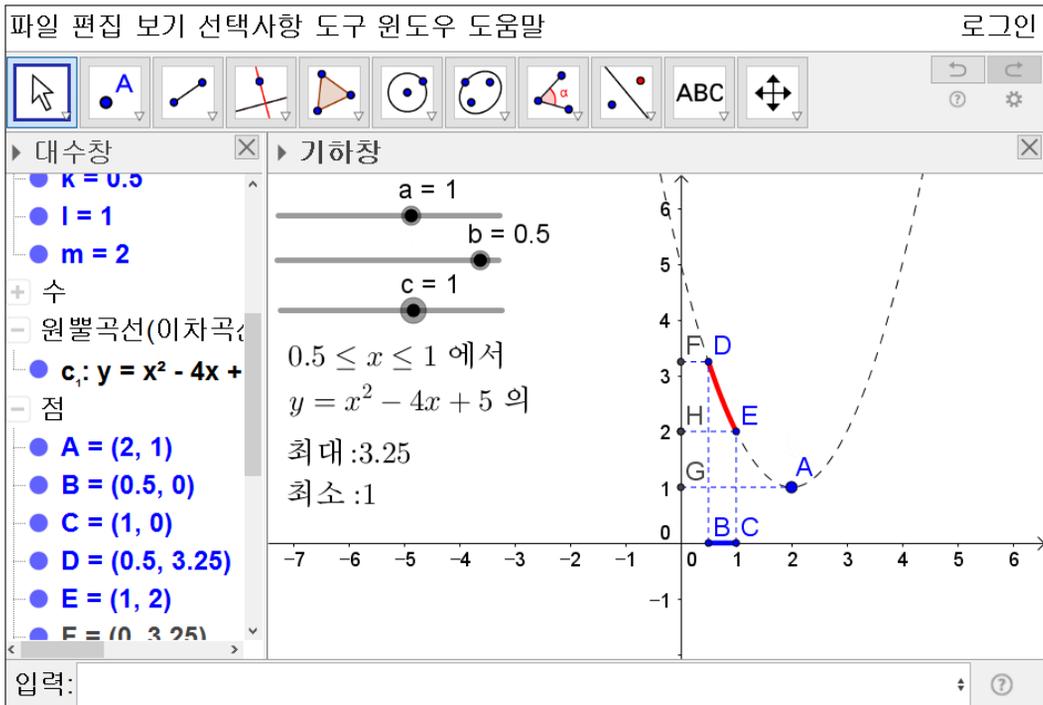


텍스트 입력 작업을 계속 하겠습니다. 기하창에  $0.5 \leq x \leq 3$ 가 만들어졌습니다. ‘텍스트’ 도구를 선택하고 ‘x’ 표시한 부분을 선택합니다. LaTeX 체크상자를 선택합니다. 편집을 선택하고 대상을 선택합니다. 스크롤을 적당히 조절하여  $c_1$ 이 나타나도록 하고  $c_1$ 을 선택합니다.  $\text{\textbackslash \text{의}}$  라고 입력합니다. 미리보기 창에 ‘ $y = x^2 - 4x + 5$  의 ’가 나타날 것입니다. 확인을 선택합니다. 기하창에  $y = x^2 - 4x + 5$  의 가 만들어졌습니다. ‘텍스트’ 도구를 선택하고 ‘x’ 표시한 부분을 선택합니다. 편집을 선택하고  $\text{\textbackslash \text{최대:}}$ 를 입력합니다. 대상을 선택합니다. 스크롤을 적당히 조절하여 점 F가 나타나도록 한 다음 점 F를 선택합니다. LaTeX 수식의 체크상자를 선택합니다. 미리보기 창에 ‘최대:(0, 3.25)’가 나타납니다. 편집창에 대상 점 F를 선택합니다. 대상 점 F를 편집할 수 있게 됩니다.  $y(F)$ 라 입력하면 미리보기 창이 ‘최대:3.25’로 변합니다. 확인을 선택합니다. 기하창에 ‘최대:3.25’가 만들어졌습니다.

# 제 1 장 GEOGEBRA를 활용한 기하와 함수



‘텍스트’ 도구를 선택하고 ‘x’ 표시한 부분을 선택합니다. 편집을 선택하고 ‘\text{최소:}’ 를 입력합니다. 대상을 선택합니다. 스크롤을 적당히 조절하여 점 G가 나타나도록 한 다음 점 G를 선택합니다. LaTeX 수식의 체크상자를 선택합니다. 미리보기 창에 최소:(0, 1)가 나타납니다. 편집장에 대상 점 G를 선택합니다. 점 G를 편집할 수 있게 됩니다. y(G)라 입력하면 미리보기 창이 ‘최소:1’로 변합니다. 확인을 선택합니다.

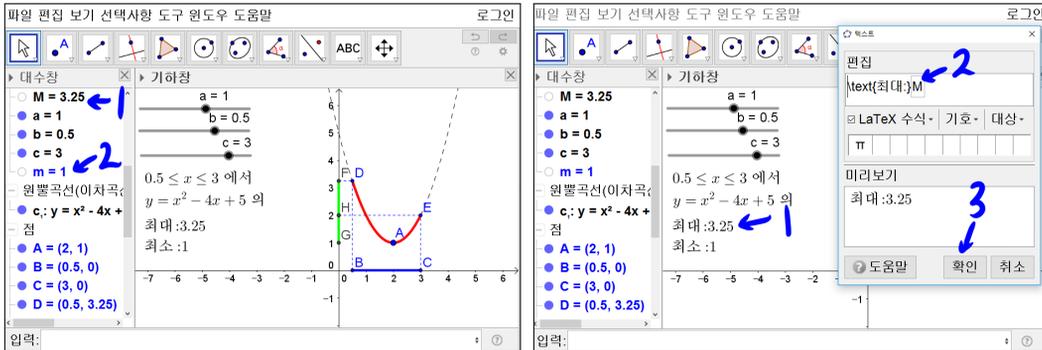


기하창에 범위와 함수, 최대 그리고 최소에 대해 표현된 것을 볼 수 있습니다. '이동' 도구를 선택하고 스크롤을 수  $c$ 가 보이도록 적당히 조절하고 수  $c$ 를 선택 후  $c = 1$ 의 값으로 키보드 좌우 방향키를 사용하여 조절하면 최소가 2가 되어야 하는데 최소가 1로 고정된 것을 볼 수 있습니다. 아직도 미완성인 것입니다. 수  $c$ 를 다시 3으로 합니다.

그럼 위와 같은 문제를 해결할 방법이 있을까요? Geogebra에는 이러한 부분을 해결할 수 있는 내장 함수를 제공합니다. 조건문, 최댓값, 최솟값 함수를 활용하면 됩니다. 각 함수의 대략적인 설명 및 쓰는 방법은 다음과 같습니다.

조건문[조건, 실행1, 실행2]	조건을 만족할 때 실행1을 실행함. 그렇지 않으면 실행2를 실행함.
최댓값[{값1, 값2, 값3, ..., 값n}]	값1, 값2, ..., 값n 중 가장 큰 값
최솟값[{값1, 값2, 값3, ..., 값n}]	값1, 값2, ..., 값n 중 가장 작은 값

하지만, 직접 써봐야 알 수 있을 것입니다.



입력창에

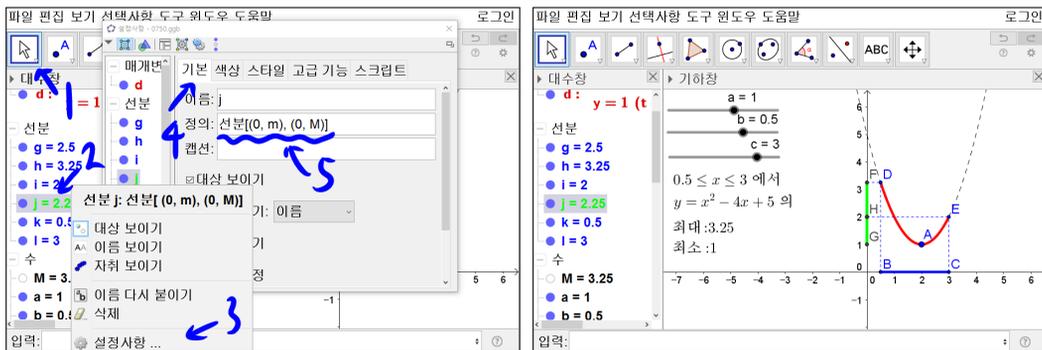
$M = \text{조건}[x(D) < x(A) < x(E), \text{최댓값}[\{y(D), y(E), y(A)\}], \text{최댓값}[y(D), y(E)]]$ ,

$m = \text{조건}[x(D) < x(A) < x(E), \text{최솟값}[\{y(D), y(E), y(A)\}], \text{최솟값}[y(D), y(E)]]$

## 제 1 장 GEOGEBRA를 활용한 기하와 함수

을 입력해 봅시다. 대수창에 M과 m의 값이 표현된 것을 볼 수 있습니다. 이제 마지막 단계까지 왔습니다. 만들어진 수  $M = 3.25$ 와 수  $m = 1$ 을 잘 활용해 봅시다. 일단 최대와 최소를 이것을 이용하여 바꾸어 보도록 합시다. ‘이동’ 도구를 선택하고 최대:3.25를 더블 클릭하면 ‘텍스트’ 도구가 나타납니다. 이때 편집창의 y(E)를 선택하고 M으로 변경합니다.

같은 방식으로 ‘이동’ 도구를 선택하고 최소:1를 더블 클릭하면 ‘텍스트’ 도구가 나타납니다. 이때 편집창의 y(G)를 선택하고 m으로 변경합니다. 겉보기에는 변함이 없겠지만 점 A만 ‘이동’ 도구를 선택하고 기하창에서 움직여보면 최대, 최소가 점 A를 이동하면서 동적으로 변하는 것을 볼 수 있을 것입니다.



‘이동’ 도구를 선택한 후 대수창의 선분 j가 보이도록 스크롤바를 적당히 위치시킨 후 선분 j의 설정사항 창으로 들어갑니다. 기본을 선택하고 정의를 선택합니다. 정의창에 선분[F, G]를 선분[(0, m), (0, M)]으로 바꿉니다. 그리고 고급 기능을 선택 후 ‘대상이 나타나기 위한 조건’을 지웁니다. 그리고 설정사항 창을 닫습니다. 위와 같이 완성되었습니다.

점 A를 이동시켜 봅시다. 지역에 해당하는 선분이 여러 가지 상황에서 알맞게 그려지는 것을 보았을 것입니다. 최대, 최소도 원하는 모든 경우에 대해 제대로 표시가 됩니다. 앞에서 조금 언급한 내용이 느껴질 것입니다. 왜 고생스

러운 작업을 했지? 각각의 조건에 대한 수식을 작성해서 치역에 해당하는 선분을 만들었지? 이런 생각이 드는 것이 자연스럽습니다. 사실 기능을 알려주려는 목적도 있었지만 Geogebra의 내장함수를 활용한 부분은 너무 쉽게 접근 가능하고 각각의 경우에 대하여 따져보도록 하는 것이 오히려 수학수업에 더 의미가 있을 수 있기 때문이었습니다.



---

## 찾아보기

---

LaTeX 체크상자, 21, 22

그리고, 18

기하창 이동, 6

논리 연산자, 18

대상이 나타나기 위한 조건, 17

선분, 9

설정사항 저장, 4

수식과 기호, 22

슬라이더, 5, 8

이동, 6

이름 보이기의 체크상자, 10

제곱근과 분수, 22

조건문, 25

최댓값, 25

최솟값, 25

텍스트, 21

그동안 했던 강의 자료 중 일부를 책으로 엮음.

<http://min7014.iptime.org/math/2017063002.htm>



한국고원대학교 융합교육연구소 추천 도서

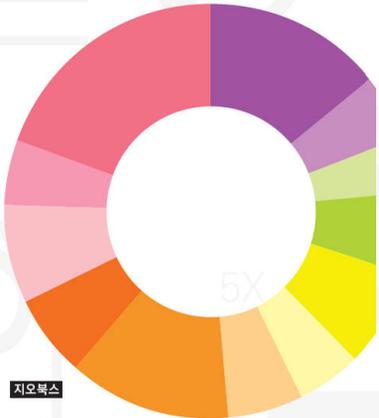
지자 민 은 기

**수 학 교 사 와 학 생 을 위 한**

# Geogebra 와 수학의 시각화

지자 민 은 기 | 이 경 수

Geogebra를  
활용한 수업자료 제작과  
수학문제 탐구활동



지자 이 경 수

강원대학교 사범대학 수학교육과를 졸업한 후 학교현장에서 즐거운 수학교육을 만들고자 노력하고 있습니다. 프로그래밍에 흥미가 있어 Geogebra, SageMath 등의 소프트웨어로 수업자료를 만드는 활동을 즐겨하고 있으며 이를 수업에 효율적으로 적용할 수 있는 방법을 고민하고 있습니다. 특히, 통계관련 시뮬레이션 자료를 제작하는 활동에 관심이 많습니다.

- 2017년 현재 원주여자고등학교 재직 중
- 2015년-2017년 단위학교 맞춤형 직무연수 출강
- 2016년 교육부 중앙교육연수원 [융합과 미래] 콘텐츠 개발
- 2016년 강원도 중등 수학과 좋은 수업 만들기 직무연수 출강
- 2013년-2016년 강원도 중등수학과1급정교사 자격연수 출강
- 2015년-2016년 YSC 강원도청소년과학캠프 창의력 문제 출제 및 심사

지오박스



지오박스

지오박스

T 02-2263-6414 F 02-2268-9481  
www.emotionbooks.co.kr



수학교사와 학생을 위한  
Geogebra와 수학의 시각화

5X

지자 민 은 기



<https://ggbm.at/gsARCQs5>

책자료실(지오지브라 튜브)

---

[참고]

[민은기 선생님의 수학자료실]

Homepage : <http://min7014.iptime.org>

Facebook Page : <https://www.facebook.com/mineungimath>

YouTube Channel : <https://goo.gl/JpzU5i>

[이경수 선생님 블로그]

<http://blog.naver.com/evening07>

[GeoGebra 5.0.363.0-3D (03 June 2017) 설치파일]

Installer : <https://goo.gl/YvjsCV> (From Home Page)

Installer : <https://goo.gl/n69yE1> (From Google Drive)

[GeoGebra 5.0.462.0-d (02 May 2018) 설치파일]

Installer : <https://goo.gl/SsdFBd> (From Home Page)

Portable : <https://goo.gl/FxJxES>(From Home Page)

Installer : <https://goo.gl/dqtbfk> (From Google Drive)

Portable : <https://goo.gl/zwundc>(From Google Drive)